

## Das stationäre Verhalten eines Josephson-Tunnelements

Von M. RIEDEL, H.-G. MEYER, W. KRECH

Sektion Physik der Friedrich-Schiller-Universität Jena

**Inhaltsübersicht.** Im Rahmen der Werthamer-Theorie untersuchen wir das Strom-Spannungs-Verhalten eines autonomen Josephson-Tunnelements bei Speisung durch eine Stromquelle mit endlichem Innenwiderstand. Der Grenzfall der Konstantspannungsspeisung und der Fall großer Kapazitäten werden analytisch mit Hilfe eines Störungsverfahrens im Frequenzraum gelöst. Die numerisch gewonnenen asymptotischen Lösungen zeigen charakteristische Abweichungen von den Lösungen, die im RSJ-Modell erhalten werden.

### The Stationary Behaviour of a Josephson Junction

**Abstract.** Within the frame of the Werthamer theory we investigate the current-voltage dependence of an autonomous Josephson junction fed by a current source with finite load resistance. The limiting case of the voltage biased junction and the case of a large capacitance are solved analytically using a perturbation calculation in the frequency domain. The numerically calculated asymptotical solutions show significant deviations from the solutions obtained within the RSJ-model.

### 1. Einleitung

Josephson-Tunnelemente sind kryoelektronische Bauelemente mit extrem nicht-linearen Eigenschaften. In Abhängigkeit von der Art ihrer elektrischen Speisung unterscheidet man zwei verschiedene Betriebsregimes: Liegt am Element eine Konstantspannung  $V_0$  an, so fließt ein hochfrequenter Wechselstrom mit der Josephsonfrequenz  $\Omega_0 = 2eV_0/\hbar$ ; fließt andererseits durch das Element ein Konstantstrom  $I_0$ , so wird eine hochfrequente Wechselspannung erzeugt, die alle harmonischen Oberwellen der Grundfrequenz  $\Omega_0 = 2e\overline{V(t)}/\hbar$  enthält. In beiden Fällen entsteht in der Tunnelbarrierschicht ein elektromagnetisches Wechselfeld, das in die Umgebung abgestrahlt wird.

Auf Grundlage der mikroskopischen Theorie der Supraleitung hat WERTHAMER [1] bereits 1966 eine Beschreibung des elektrischen Verhaltens gegeben. Die von ihm gefundene Formel für die Strom-Spannungs-Abhängigkeit konnte jedoch erst über 10 Jahre später aus dem Frequenzraum in den Zeitbereich überführt und damit vollständig verstanden werden [2—4]. Daneben existiert das phänomenologische RSJ-Modell [5], welches im Vergleich zum Werthamer-Modell bedeutend einfacher ist, jedoch die wesentlichen qualitativen Merkmale richtig wiedergibt. Die Ende der siebziger Jahre vorgeschlagenen neuen Anwendungsmöglichkeiten von Josephson-Tunnelementen u. a. als Spannungsstandard [6] bzw. Frequenzmischer [7] haben in den letzten Jahren ein zunehmendes Interesse an der mikroskopischen Beschreibung hervorgerufen.

In dieser Arbeit wollen wir das stationäre Verhalten eines Josephson-Tunnelements im Werthamer-Modell untersuchen; die erhaltenen Ergebnisse werden zum besseren Verständnis mit den Resultaten des RSJ-Modells verglichen.

## 2. Grundlegende Beziehungen

Wir legen folgende einander äquivalente Schaltungsanordnungen zugrunde:

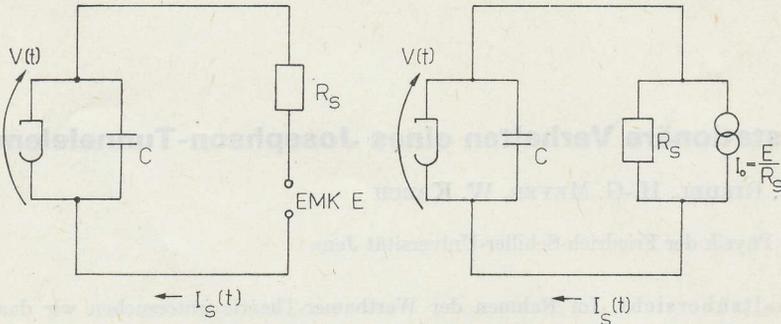


Abb. 1. Schaltanordnungen des autonomen Josephson-Tunnelelementes

Das Josephson-Tunnelelement besitzt die endliche Kapazität  $C$  und wird von einer Stromquelle mit dem Innenwiderstand  $R_S$  gespeist. Der Strom  $I_S(t)$  durch das Tunnelelement ist mit

$$I_S(t) = I_0 - \frac{1}{R_S} V(t) \tag{1a}$$

gegeben, insbesondere gilt für die Gleichstromanteile (der Querstrich symbolisiert den zeitlichen Mittelwert)

$$\overline{I_S(t)}^t = I_0 - \frac{1}{R_S} \overline{V(t)}^t. \tag{1b}$$

### 2.1. Das Werthamer-Modell

Im Rahmen des WERTHAMER-Modells [1] erhält man für die Strom-Spannungs-Abhängigkeit die nichtlineare Integrodifferentialgleichung

$$I_0 = C \cdot \dot{V}(t) + Im \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega d\Omega' \left\{ W(\Omega) W^*(\Omega') e^{i(\Omega - \Omega')t} I_q \left( \Omega' + \frac{\Omega_0}{2} \right) + W(\Omega) W(\Omega') e^{i(\Omega + \Omega' + \Omega_0)t} I_p \left( \Omega' + \frac{\Omega_0}{2} \right) \right\} + \frac{1}{R_S} V(t). \tag{2}$$

Die Konstantphase im Exponenten vor dem Paarstromanteil  $I_p$  wurde hierbei mit in die komplexe Spektralfunktion  $W(\Omega)$  einbezogen.  $W(\Omega)$ , die Phasendifferenz über dem Josephson-Kontakt  $\varphi(t)$  und die abfallende Spannung  $V(t)$  stehen durch

$$e^{i\frac{\varphi(t)}{2}} = e^{i\frac{\Omega_0}{2}t} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega W(\Omega) e^{i\Omega t} = e^{i\frac{e}{\hbar} \int_{t_0}^t V(t') dt'} \tag{3}$$

miteinander in Beziehung. Die bekannten komplexen Stromresponsefunktionen  $I_p(\Omega)$  und  $I_q(\Omega)$  [8–10] genügen in dieser Darstellung der Vorzeichenkonvention von POULSEN [8]; sie enthalten die Informationen über die Art der supraleitenden Elektroden und die Temperatur  $T$  am Tunnelelement. Es ist zweckmäßig, zu dimensionslosen Größen überzugehen:

$$\begin{aligned} i(s) &= I_S(t)/I_C, & \gamma &= (\Delta_1 + \Delta_2)/eR_N I_C, \\ v(s) &= V(t) e/(\Delta_1 + \Delta_2), & \omega_0 &= \Omega_0 \hbar/(\Delta_1 + \Delta_2), \\ \alpha &= R_N/R_S, & s &= t(\Delta_1 + \Delta_2)/\hbar, \\ \beta_C &= 2eI_C R_N^2 C/\hbar, & \omega &= \Omega \hbar/(\Delta_1 + \Delta_2). \end{aligned} \tag{4}$$

$\Delta_1$  bzw.  $\Delta_2$  sind die Energielücken der beiden nicht notwendig gleichen Supraleiter bei  $T = 0$ ,  $I_C$  ist der kritische Strom und  $R_N$  der Normalleitungswiderstand des Tunnelements.

Somit folgt

$$\begin{aligned} \hat{i}_0 &\equiv \overline{i(s)^s} \\ &= \frac{\gamma^2}{2} \beta_C \dot{v}(s) + \gamma \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega d\omega' \left\{ W(\omega) W^*(\omega') e^{i(\omega-\omega')s} i_q \left( \omega' + \frac{\omega_0}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + W(\omega) W(\omega') e^{i(\omega+\omega'+\omega_0)s} i_p \left( \omega' + \frac{\omega_0}{2} \right) \right\} + \gamma \chi [v(s) - \overline{v(s)^s}] \end{aligned} \quad (5)$$

und

$$e^{i \frac{v(s)}{2} s} = e^{i \frac{\omega_0}{2} s} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega W(\omega) e^{i\omega s} = e^{i \int_{s_0}^s v(s') ds'} \quad (6)$$

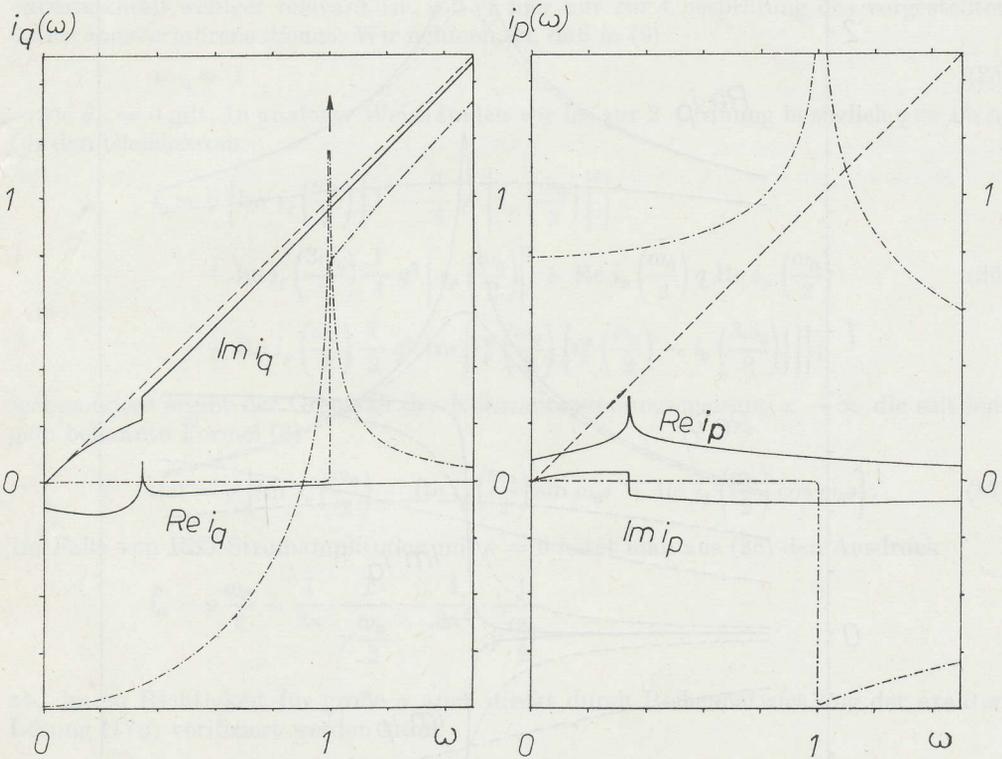


Abb. 2. Real- und Imaginärteil der Stromresponsefunktionen  $i_q(\omega)$  und  $i_p(\omega)$  für eine symmetrische Tunnelverbindung im VBCS-Modell ( $\gamma = 4/\pi$ ,  $\eta = 10^{-4}$ ):

a)  $T = 0$  - - - - ; b)  $T = 0,96T_C$  ———

Bei der Berechnung der BCS-Stromresponsefunktionen  $i_p(\omega)$  und  $i_q(\omega)$  haben wir Zustandsdichten benutzt, in denen Dämpfungseffekte infolge von Paarbrechung oder Lückenanisotropie [10, 11] phänomenologisch über einen kleinen Imaginärteil  $\eta$  in den Energielücken  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  berücksichtigt werden (sog. VBCS-Modell, vgl. Abb. 3).

Um die stationären Eigenschaften des Tunnелеlements im resistiven Zustand ( $\varphi(s) \neq \text{const.}$ ) zu erhalten, muß die asymptotische Lösung  $v(s)$  für  $s \rightarrow \infty$  von (5) und (6) berechnet werden, von der wir annehmen, daß sie eine periodische Zeitabhängigkeit besitzt (vgl. Abschn. 3). Entsprechend zerlegen wir die Spektralfunktion  $W(\omega)$  in Harmonische der Grundfrequenz  $\omega_0$ , welche sich ihrerseits in Abhängigkeit vom ein-

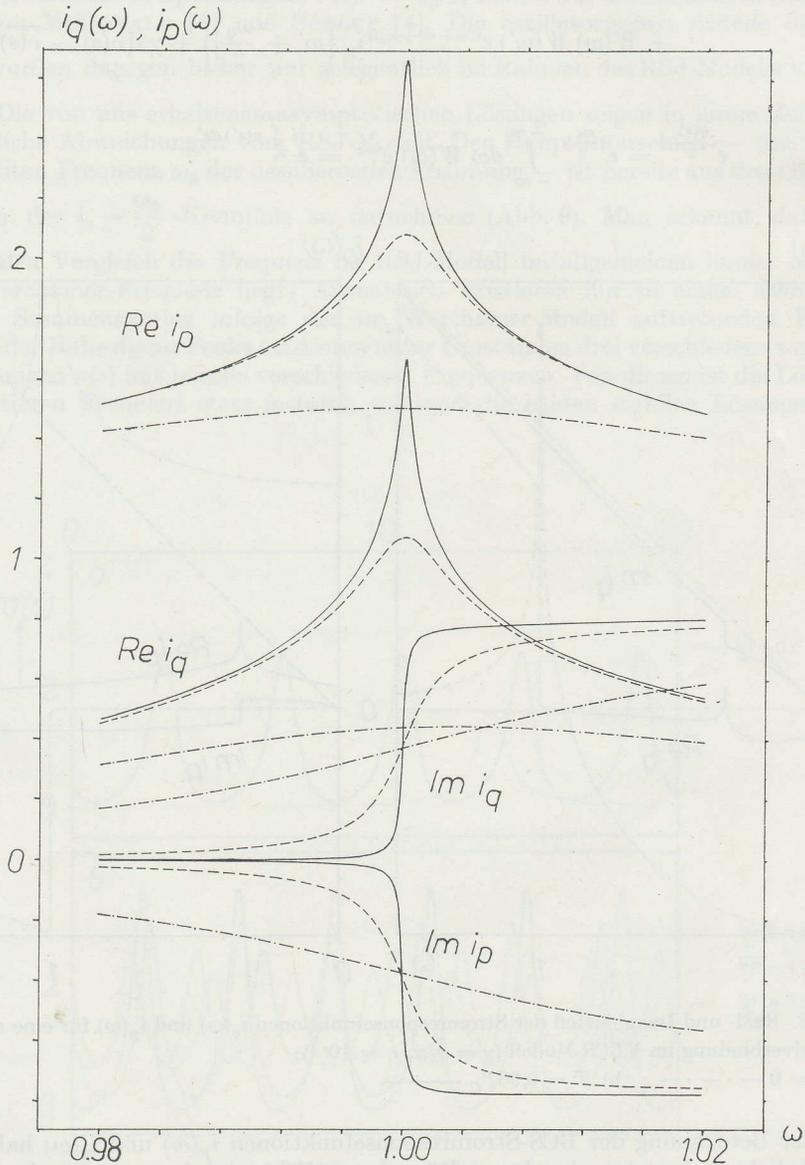


Abb. 3. Vergrößerter Ausschnitt von Abb. 2 ( $T = 0$ ) für  $\omega \geq 1$ :

a)  $\eta = 10^{-4}$  ———; b)  $\eta = 10^{-3}$  - - - - -; c)  $\eta = 10^{-2}$  - . - . - .

geprägten Strom am Arbeitspunkt des Tunnelementes eingestellt hat [2]:

$$W(\omega) = \sum_k W_k \delta(\omega - k\omega_0). \quad (7)$$

Wir können also ansetzen

$$v(s) = \frac{\omega_0}{2} + \sum_k v_k e^{ik\omega_0 s}, \quad v_0 \equiv 0, \quad (8a)$$

$$i(s) = \hat{i}_0 + \sum_k i_k e^{ik\omega_0 s}, \quad i_0 \equiv 0. \quad (8b)$$

Durch Kombination von (1), (5), (6) und (7) erhält man das nichtlineare algebraische Gleichungssystem

$$0 = \sum_k \left\{ [W_k^* W_{k+n} - W_{-k-1} W_{-k-1-n}^*] \cdot \left[ i_q \left( \left( k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \right) - \frac{1}{2} \gamma \beta_C \omega_0^2 k n + i\alpha \left( k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \right] \right. \quad (9)$$

$$\left. + [W_k W_{n-k-1} - W_{-n+k}^* W_{-k-1}^*] \cdot i_p \left( \left( k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \right) \right\} \quad \forall n \geq 1,$$

$$\hat{i}_0 = \gamma \sum_k \left\{ W_k^* W_k \operatorname{Im} i_q \left( \left( k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \right) + \operatorname{Im}(W_k W_{-k-1}) \operatorname{Re} i_p \left( \left( k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \right) \right\}, \quad (10)$$

$$\delta_{0,n} = \sum_k W_k^* W_{k+n} \quad \forall n \geq 0 \quad (11)$$

für die komplexen Koeffizienten  $W_k$ ;  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  Weiterhin folgt

$$v_n = \omega_0 \sum_k k W_k^* W_{k+n}, \quad (12)$$

$$i_n = -\alpha \gamma \omega_0 \sum_k k W_k^* W_{k+n}. \quad (13)$$

Die Gleichungen (9) bis (13) liefern die gesuchte Beschreibung der stationären Eigenschaften des Tunnelementes.

Der Einfluß von  $C$  und  $R_S$  geht über  $\frac{\gamma \beta_C}{2} = R_N C \cdot (\Delta_1 + \Delta_2) / \hbar$  und  $\alpha = R_N / R_S$  in (9) ein. Für die explizite Lösung ist es notwendig, den Zeitnullpunkt  $s_0$  festzulegen. Das wird entsprechend Gl. (6) z. B. mit der Forderung

$$\operatorname{Im} \left( W_0 e^{-i \frac{z}{2}} \right) = 0 \quad (14)$$

realisiert. Der Wert der Absolutphase  $z$  ist im resistiven Zustand des Tunnelementes ohne Belang und kann daher willkürlich zu Null gewählt werden. Da eine geschlossene analytische Lösung obiger Gleichungen im allgemeinen nicht möglich ist, haben McDONALD und Mitarb. [2] ein numerisches Lösungsverfahren entwickelt, welches auf der Annahme beruht, daß von der unendlichen Anzahl der  $W_k$  nur endlich viele wesentlich von Null verschieden sind und somit zum Strom beitragen können. In einigen Spezialfällen kann man jedoch analytische Lösungen bzw. Näherungen angeben.

## 2.2. Das RSJ-Modell

Wir vereinfachen die komplexen Stromresponsefunktionen durch den Ansatz

$$\hat{i}_q(\omega) = \text{Re } i_q(0) + i\omega, \quad (15a)$$

$$\hat{i}_p(\omega) = \text{Re } i_p(0) + i\varepsilon\omega, \quad -1 \leq \varepsilon \leq 1 \quad (15b)$$

und erhalten unter Beachtung der Identität

$$\sum_n \sum_k \{W_k W_{n-k-1} - W_{-n+k}^* W_{-k-1}^*\} e^{in\omega_0 s} \equiv 2i \sin \varphi(s)$$

nach geeigneten Umformungen die bekannte Grundgleichung des RSJ-Modells [5, 12]

$$i(s) = \frac{\gamma^2}{4} \beta_C \ddot{\varphi}(s) + \frac{\gamma}{2} \dot{\varphi}(s) [1 + \varepsilon \cos \varphi(s)] + \sin \varphi(s) \quad (16a)$$

bzw.

$$\hat{i}_0 = \frac{\gamma^2}{2} \beta_C \dot{v}(s) + \gamma v(s) [1 + \varepsilon \cos \varphi(s)] + \sin \varphi(s) - \gamma \alpha \overline{v(s)}^s. \quad (16b)$$

Das Werthamer-Modell und das phänomenologische RSJ-Modell unterscheiden sich also nur in den funktionalen Abhängigkeiten der Stromresponsefunktionen. Anhand deren Eigenschaften [8, 9] kann man erkennen, daß für  $T$  nahe der kritischen Temperatur  $T_C$  der Supraleiter der Ansatz (15) mit  $\varepsilon = 0$  relativ gut erfüllt und daher das RSJ-Modell eine gute Näherung für (5) und (6) ist.<sup>1)</sup> Diese Aussage steht in einer gewissen Analogie dazu, daß nahe  $T_C$  auch für schwach supraleitende Verbindungen mit direkter Leitfähigkeit die RSJ-Grundgleichung abgeleitet werden kann [13]. Faßt man andererseits bei einer festen Temperatur unterhalb  $T_C$  die Funktionen  $i_p(\omega)$  und  $i_q(\omega)$  als Modellgrößen zur Beschreibung der Materialeigenschaften des Tunnелеlements auf, so können — da bekannt ist, daß die Strom-Spannungs-Abhängigkeit von supraleitenden Brücken und Punktkontakten auch bei tieferen Temperaturen durch (16) zufriedenstellend beschreibbar ist — brückenähnliche Eigenschaften dieser Tunnелеlemente durch geeignete Wahl der  $i_p(\omega)$  und  $i_q(\omega)$  modelliert werden. Wegen der Vereinfachung (15) gehen im RSJ-Modell die Informationen über den internen photon-assistierten Tunnelstrom und über die Größe der Energielücken verloren; im Zeitbereich entspricht das dem Verlust der Retardierungseigenschaft der Werthamer-Gleichung [3]. Falls die Kapazität verschwindet und  $\varepsilon = 0$  ist, hat Gl. (16) die bekannte Lösung

$$\hat{i}_0 = \sqrt{\gamma^2(1 + \alpha)^2 \left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2 + 1} - \gamma\alpha \frac{\omega_0}{2}, \quad (17a)$$

$$v(s) = \frac{\omega_0}{2} \cdot \frac{a^2 - 1}{a^2 + 2a \sin \omega_0 s + 1}, \quad a \equiv \hat{i}_0 + \gamma(1 + 2\alpha) \frac{\omega_0}{2}, \quad (17b)$$

$$v_n = \frac{\omega_0}{2} \cdot \frac{1}{a^n} \cdot e^{in \frac{\pi}{2}}, \quad n \geq 1. \quad (17c)$$

Im Grenzfall einer Konstantspannungspeisung folgt aus (17) sofort

$$i(s) = \hat{i}_0 - \gamma\alpha \sum_n v_n e^{in\omega_0 s} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \gamma \frac{\omega_0}{2} + \sin \omega_0 s, \quad (18a)$$

$$v(s) = \frac{\omega_0}{2} + \sum_n v_n e^{in\omega_0 s} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\omega_0}{2}. \quad (18b)$$

<sup>1)</sup> Der strenge Grenzübergang  $T \rightarrow T_C$  führt zum Verlust des Paarstromanteils und damit des  $\sin \varphi$ -Terms im RSJ-Modell.

2.3. Näherungslösungen

Wir nehmen an, daß

$$\gamma\beta_C\omega_0^2 \gg 1 \tag{19}$$

gilt. Diese Bedingung ist oberhalb der Summenlücke ( $\omega_0 \geq 2$ ) praktisch für beliebige Tunnelemente stets gut erfüllt; im Lückenbereich kann sie nur von hochkapazitiven Tunnelementen erfüllt werden. Die Gleichungen (9) bis (11) können dann mittels einer Reihenentwicklung nach dem kleinen Parameter  $p \equiv 1/\gamma\beta_C\omega_0^2$  analytisch gelöst werden. Wir setzen

$$W_k = \sum_{i=0}^{\infty} W_k^{(i)} p^i, \tag{20}$$

$$\hat{i}_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{i}_0^{(i)} p^i, \quad v_k = \sum_{i=0}^{\infty} v_k^{(i)} p^i$$

an und ordnen die resultierenden Terme nach Potenzen von  $p$ . Im Ergebnis folgt in  $m$ -ter Ordnung ( $\delta_{k,j}$  bezeichnet das Kronecker-Symbol):

- a)  $m = 0: W_k^{(0)} = \delta_{k,0}$
- b)  $m = 1: W_0^{(1)} = 0, \quad W_1^{(1)} = -W_{-1}^{(1)*} = i_p \left(\frac{\omega_0}{2}\right),$   
 $W_k^{(1)} = 0, \quad \forall |k| > 1,$
- c)  $m = 2: W_0^{(2)} = -\left|i_p \left(\frac{\omega_0}{2}\right)\right|^2,$   
 $W_1^{(2)} = -W_{-1}^{(2)*} = i_p \left(\frac{\omega_0}{2}\right) \left[ i_q \left(\frac{\omega_0}{2}\right) - i_q^* \left(\frac{3\omega_0}{2}\right) + 2i\alpha\omega_0 \right],$   
 $W_2^{(2)} = \left[ i_p \left(\frac{\omega_0}{2}\right) \right]^2 - W_{-2}^{(2)*} = \frac{3}{4} \left[ i_p \left(\frac{\omega_0}{2}\right) \right]^2 + \frac{1}{4} i_p \left(\frac{\omega_0}{2}\right) i_p \left(\frac{3\omega_0}{2}\right),$   
 $W_k^{(2)} = 0 \quad \forall |k| > 2,$
- d)  $m > 2: W_k^{(m)} = 0 \quad \forall |k| > m.$

Bei kleinen  $p$  sind die Beträge der Koeffizienten  $W_k$  bezüglich ihres Indexes  $k$  der Größe nach geordnet, also

$$|W_0| \gg |W_1|, |W_{-1}| \gg |W_2|, |W_{-2}| \gg \dots \tag{21}$$

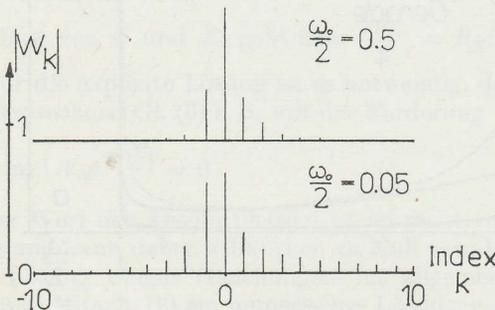


Abb. 4. Darstellung der  $W_k$ -Hierarchie (numerisch) im VBCS-Modell bei  $T = 0, \beta_C = 0,5, \alpha = 0, \eta = 10^{-4}$  und  $\gamma = 4/\pi$

Wie die numerischen Ergebnisse zeigen, wird diese Hierarchie nur durchbrochen, wenn die Argumente der Stromresponsefunktionen  $i_p\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\omega_0\right)$  und  $i_q\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\omega_0\right)$  in der Nähe von 1 liegen, d.h. bei  $\omega_0/2 \simeq 1/(2k + 1)$ , oder bei großen  $p$ . In beiden Fällen ist die Reihenentwicklung fehlerhaft (vgl. Abb. 5). Setzen wir a) bis c) in (10) ein, können wir den Gleichstrom  $\hat{i}_0$  in Abhängigkeit von der mittleren Spannung  $\omega_0/2$  bis zur 2. Ordnung in  $p$  ausrechnen:

$$\begin{aligned} \hat{i}_0 = \gamma & \left\{ \operatorname{Im} i_q\left(\frac{\omega_0}{2}\right) \left[ 1 - 3p^2 \left| i_p\left(\frac{\omega_0}{2}\right) \right|^2 \right] \right. \\ & + \operatorname{Im} i_q\left(\frac{3\omega_0}{2}\right) p^2 \left| i_p\left(\frac{\omega_0}{2}\right) \right|^2 + \operatorname{Re} i_p\left(\frac{\omega_0}{2}\right) \cdot \operatorname{Im} \left\{ 2pi_p\left(\frac{\omega_0}{2}\right) \right. \\ & \left. \left. + 2p^2 i_p^*\left(\frac{\omega_0}{2}\right) \left[ i_q\left(\frac{3\omega_0}{2}\right) - i_q^*\left(\frac{\omega_0}{2}\right) + 2i\alpha\omega_0 \right] \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Gleichung (22) stimmt mit dem von SCHLUP [4] früher auf anderem Weg erhaltenen Resultat überein, für  $\beta_C \geq 10$  ist sie bereits eine gute Näherung (Abb. 5).

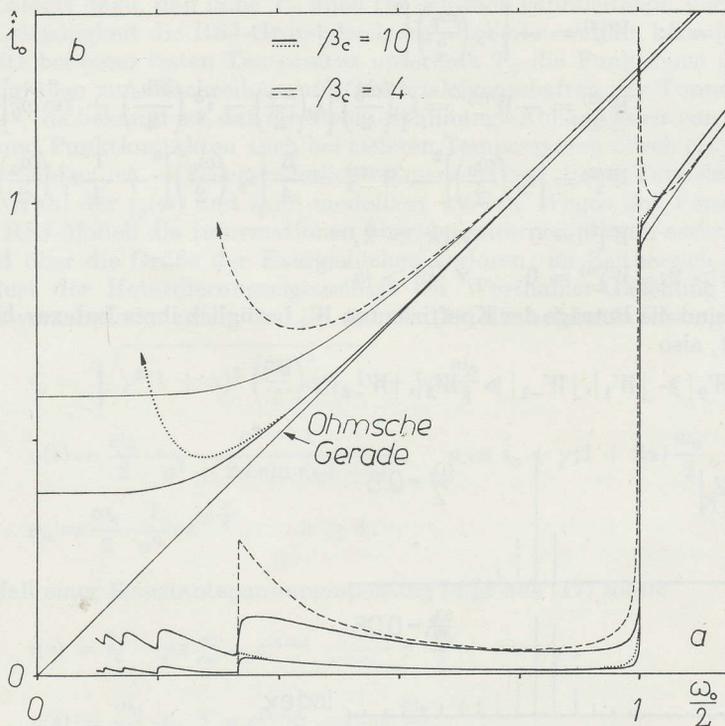


Abb. 5. Vergleich der Näherungen (22) bzw. (23) mit der numerischen Lösung (durchgezogene Linien) für  $\beta_C = 10$ ,  $\beta_C = 4$  ( $\alpha = 0$ ,  $\gamma = 4/\pi$ ):

a) VBCS-Modell:  $T = 0$ ,  $\eta = 10^{-4}$ ; b) RSJ-Modell:  $\varepsilon = 0$

Um den entsprechenden Ausdruck im RSJ-Modell zu erhalten, müssen wir (15) und (22) kombinieren:

$$\hat{i}_0 = \gamma \frac{\omega_0}{2} + \frac{1 + \alpha}{2\beta_C^2} \cdot \frac{1}{\left(\gamma \frac{\omega_0}{2}\right)^3}. \quad (23)$$

In der Abb. 4 werden beide Näherungen mit der exakten numerischen Lösung verglichen. Der Rücksprungstrom  $\hat{i}_{0\min}$  aus dem resistiven Zustand des Tunnelements in den spannungslosen Zustand kann bei linearisierten Stromamplituden näherungsweise aus (23) ermittelt werden, es gilt für große  $\beta_C$  und  $\alpha = 0$

$$\hat{i}_{0\min} \cong \frac{1}{\sqrt{\beta_C}} \cdot \sqrt[4]{\frac{128}{27}} \approx \frac{1}{\sqrt{\beta_C}} \cdot 1,476. \quad (24)$$

Eine weitere analytische Näherungslösung der Werthamer-Gleichung folgt für große  $\alpha$ , also geringem Innenwiderstand  $R_S$  der Stromquelle. Da dieser Fall im allgemeinen experimentell weniger relevant ist, soll er hier nur zur Überprüfung des vorgestellten Näherungsverfahrens dienen. Wir nehmen an, daß in (9)

$$\alpha\omega_0 \gg 1 \quad (25)$$

sowie  $\beta_C = 0$  gilt. In analoger Weise finden wir bis zur 2. Ordnung bezüglich  $q \equiv 1/\alpha\omega_0$  für den Gleichstrom

$$\begin{aligned} \hat{i}_0 = \gamma \left\{ \operatorname{Im} i_q \left( \frac{\omega_0}{2} \right) \left[ 1 - \frac{3}{4} q^2 \left| i_p \left( \frac{\omega_0}{2} \right) \right|^2 \right] \right. \\ \left. + \operatorname{Im} i_q \left( \frac{3\omega_0}{2} \right) \frac{1}{4} q^2 \left| i_p \left( \frac{\omega_0}{2} \right) \right|^2 + \operatorname{Re} i_p \left( \frac{\omega_0}{2} \right) q \operatorname{Re} i_p \left( \frac{\omega_0}{2} \right) \right. \\ \left. + \operatorname{Re} i_p \left( \frac{\omega_0}{2} \right) \frac{1}{2} q^2 \operatorname{Im} \left[ i_p^* \left( \frac{\omega_0}{2} \right) \left\{ i_q^* \left( \frac{\omega_0}{2} \right) - i_q \left( \frac{3\omega_0}{2} \right) \right\} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (26)$$

insbesondere ergibt der Grenzfall der Konstantspannungspeisung  $\alpha \rightarrow \infty$  die seit langem bekannte Formel [8]

$$i(s) = \gamma \left\{ \operatorname{Im} i_q \left( \frac{\omega_0}{2} \right) + \operatorname{Re} i_p \left( \frac{\omega_0}{2} \right) \sin \omega_0 s + \operatorname{Im} i_p \left( \frac{\omega_0}{2} \right) \cos \omega_0 s \right\}. \quad (27)$$

Im Falle von RSJ-Stromamplituden mit  $\varepsilon = 0$  leitet man aus (26) den Ausdruck

$$\hat{i}_0 = \gamma \frac{\omega_0}{2} + \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{1}{\gamma \frac{\omega_0}{2}} - \frac{1}{2\alpha^2} \cdot \frac{1}{\gamma \frac{\omega_0}{2}}$$

ab, dessen Richtigkeit für große  $\alpha$  auch direkt durch Reihenentwicklung der exakten Lösung (17a) verifiziert werden kann.

### 3. Numerische Ergebnisse

Die Gleichungen (9) bis (14) wurden mit Hilfe eines Newton-Verfahrens numerisch gelöst (vgl. [2]).

#### 3.1. Asymptotische Lösungen

ABIDI und CHUA zeigten mit Hilfe eines Satzes von PLISS [14], daß die asymptotische Lösung  $v(s)$  der Gl. (16) stets eine periodische Zeitabhängigkeit besitzt, wenn sie nicht, falls  $\hat{i}_0 \leq 1$ , in die singuläre Lösung  $v(s) \equiv 0$  einmündet [15]. Im allgemeineren Wert-

hamer-Modell ist ein solcher Beweis nicht bekannt, da durch die zeitliche Retardierung der Zustandsraum des Systems (5), (6) unendlich-dimensional wird [16]. Die von uns durchgeführten numerischen Rechnungen im Zeitbereich weisen jedoch in Übereinstimmung mit bereits veröffentlichten Ergebnissen [18–21] auf ein zum RSJ-Modell analoges asymptotisches Verhalten hin. Entsprechend wollen wir uns daher mit Ansatz (7) auf solche Lösungen beschränken. In Abhängigkeit vom Wert des eingepprägten Stromes treten im resistiven Zustand unterschiedliche Momentanspannungen  $v(s)$  auf.

Die Mittelwerte dieser Spannungen,  $\overline{v(s)}^s = \omega_0/2$ , führen auf die bekannten Charakteristiken von McDONALD [2] und SCHLUP [4]. Die oszillatorischen Anteile  $\tilde{v}(s) = v(s) - \frac{\omega_0}{2}$  wurden dagegen bisher nur gelegentlich im Rahmen des RSJ-Modells untersucht [17]. Die von uns erhaltenen asymptotischen Lösungen zeigen in ihrem Zeitverhalten deutliche Abweichungen vom RSJ-Modell. Der Hauptunterschied — der Wert der eingestellten Frequenz  $\omega_0$  der oszillierenden Spannung — ist bereits aus den Gleichanteilen, d. h. der  $\hat{i}_0 - \frac{\omega_0}{2}$ -Kennlinie zu entnehmen (Abb. 9). Man erkennt, daß bei einem formalen Vergleich die Frequenz im RSJ-Modell im allgemeinen immer unterhalb der Werthamer-Frequenz liegt; Ausnahmen existieren nur in einem schmalen Bereich am Summenanstieg infolge der im Werthamer-Modell auftretenden Peak-Struktur. In der Nähe dieses Peaks existieren unter Umständen drei verschiedene asymptotische Lösungen  $v(s)$  mit jeweils verschiedenen Frequenzen. Von diesen ist die Lösung mit der mittleren Frequenz stets instabil, während die beiden stabilen Lösungen zu

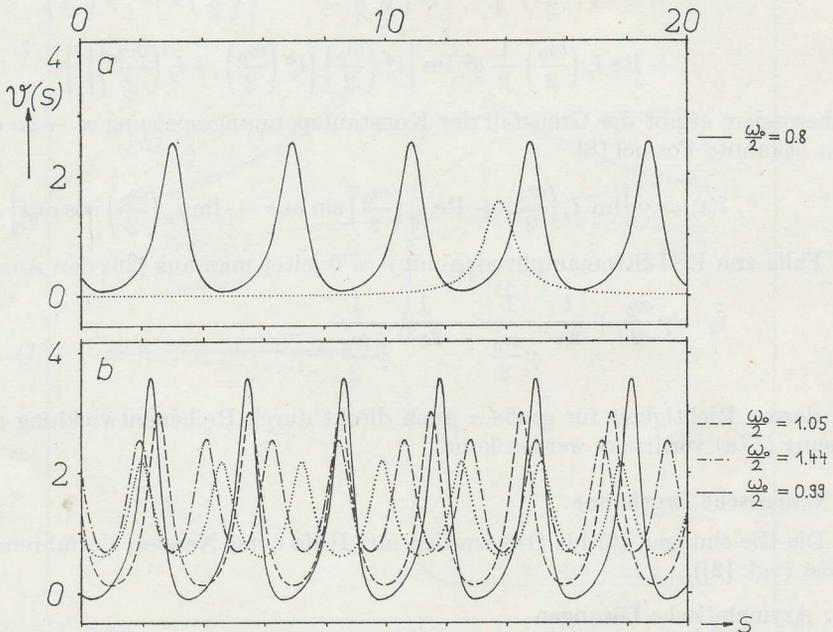


Abb. 6. Asymptotische Lösungen  $v(s)$  im VBCS- und RSJ-Modell (gepunktete Linien) für  $\beta_C = 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\eta = 10^{-4}$ :

a)  $\hat{i}_0 = 1,02$ ; b)  $\hat{i}_0 = 1,82$

einer auch experimentell beobachtbaren Stromhysterese oberhalb der Summenlücke („Knie“) führen können (Abb. 6). Weiterhin kann im Gegensatz zum RSJ-Fall (17) im Werthamer-Modell selbst für  $\beta_C = 0$ ,  $\alpha = 0$  und  $i_0 \lesssim 1$  eine resistive Lösung existieren (Abb. 9). Daraus ergibt sich die Konsequenz, daß Tunnelemente, die durch die Werthamertheorie beschrieben werden, nie eine hysteresefreie Strom-Spannungskennlinie zeigen können.

Die bisher diskutierten Unterschiede beider Modelle werden jedoch unbedeutend, falls asymptotische Lösungen gleicher Frequenz  $\omega_0$  (d. h. durch gesonderte Stromein- stellung wird jeweils die gleiche mittlere Spannung eingestellt) verglichen werden [19]. Hier besteht eine Korrespondenz zum spannungsgespeisten Fall (27), bei dem die Wert- hamer-Gleichung eine zum RSJ-Modell ähnliche Form besitzt.

Wie aus den Gleichungen (12) und (13) ersichtlich, besteht zwischen dem Wechsel- stromanteil  $\tilde{i}(s) = i(s) - \hat{i}_0$  und der Wechselspannung  $\tilde{v}(s) = v(s) - \frac{\omega_0}{2}$  eine lineare Beziehung,

$$\tilde{i}(s) = -\alpha\gamma\tilde{v}(s). \tag{28}$$

Strom und Spannung schwingen mit einer konstanten Phasendifferenz  $\pi$ , wenn  $0 < \alpha < \infty$  ist.

Die spektrale Zusammensetzung der Spannungszosillationen ist für  $\beta_C = 0$  und  $\alpha = 0$  in Abb. 7 anhand der ersten fünf Fourierkoeffizienten  $|v_n|/\omega_0$  veranschaulicht. Im Gegensatz zum RSJ-Modell, vgl. (17c), gibt es hier Frequenzen  $\omega_0$ , bei denen die  $|v_n|$  nicht fallend nach ihrem Index geordnet sind. Das Josephson-Tunnelement schwingt bei  $\omega_0 = 2/(2k - 1)$  besonders stark mit der Frequenz  $k\omega_0$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , wobei das lokale Maximum aller  $|v_n|$  bei  $\omega_0 = 2$  am deutlichsten ausgeprägt ist.

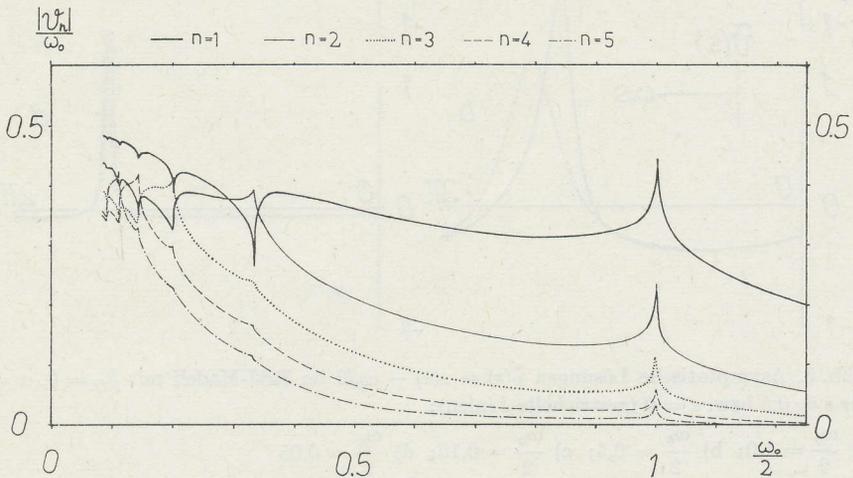


Abb. 7. Fourierkomponenten  $|v_n|/\omega_0$  von  $v(s)$  im VBCS-Modell mit  $\eta = 10^{-4}$ ,  $T = 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta_C = 0$  für  $n = 1, \dots, 5$

### 3.2. Der $\cos \varphi$ -Term im RSJ-Modell

Bei der Linearisierung der Stromresponsefunktionen  $i_p(\omega)$  und  $i_q(\omega)$  blieb für den Imaginärteil der Paarstromamplitude noch der Wert von  $\varepsilon$  offen. BELYKH und Mitarb. [12] diskutierten den Einfluß von  $\varepsilon$  auf die Gleichanteile von Strom und Spannung und fanden, daß der Fall  $\varepsilon = 0$  typisch für beliebige  $|\varepsilon| < 1$  ist. Berücksichtigt man jedoch

auch den oszillatorischen Anteil der Spannung, so zeigt die numerische Lösung von Gl. (16) bei  $\varepsilon \neq 0$  nur bei kleinen mittleren Spannungen  $\omega_0/2$  ein zum Fall  $\varepsilon = 0$  äquivalentes Verhalten. Bei größeren  $\omega_0/2 \gtrsim 1$  werden mit der Herausbildung eines stetig wachsenden Spannungspeaks zunehmend deutliche Abweichungen erkennbar. Entsprechend erscheinen in der harmonischen Analyse von  $v(s)$  eine große Zahl höherer Frequenzkomponenten. Diese besitzen keine physikalische Relevanz, da sie für Stromwerte, die groß gegen den durch den  $\sin \varphi$ -Term bestimmten kritischen Josephsonstrom sind, nicht zu erwarten sind.

Die Ursache dieses Verhaltens liegt in der unzulässigen Vereinfachung der Stromamplitude  $\text{Im } i_p(\omega)$ , die bei großen Frequenzen nicht linear extrapoliert werden darf (Abb. 2).

Der  $\cos \varphi$ -Term spielt daher im RSJ-Modell nur eine untergeordnete Rolle; wir haben in dieser Arbeit immer  $\varepsilon = 0$  gewählt.

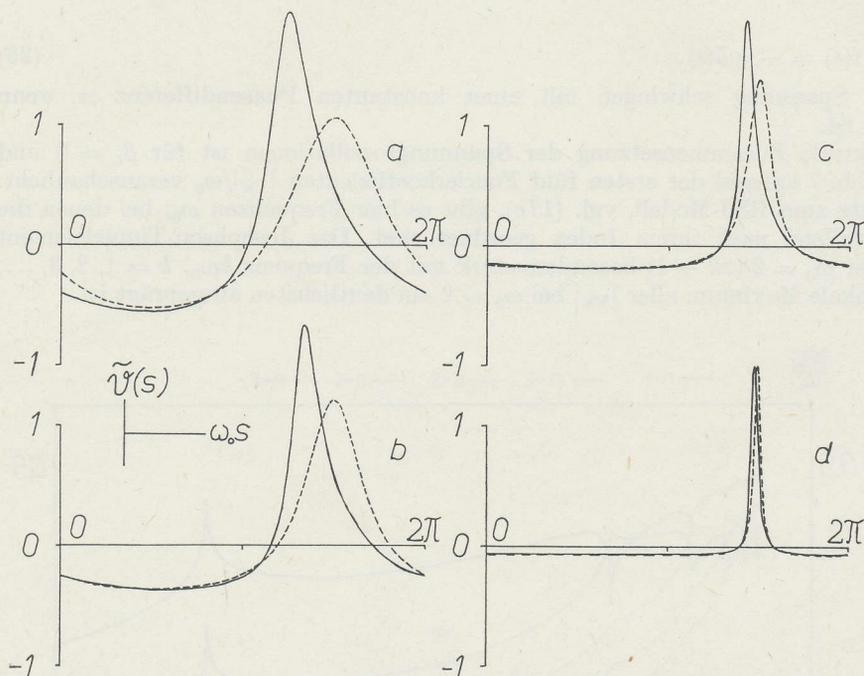


Abb. 8. Asymptotische Lösungen  $\tilde{v}(s) = v(s) - \omega_0/2$  im RSJ-Modell mit  $\beta_C = 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = 4/\pi$  für  $\varepsilon = 0,5$  bzw.  $\varepsilon = 0$  (gestrichelte Linien):

- a)  $\frac{\omega_0}{2} = 1,0$ ; b)  $\frac{\omega_0}{2} = 0,5$ ; c)  $\frac{\omega_0}{2} = 0,15$ ; d)  $\frac{\omega_0}{2} = 0,05$

### 3.3. Die Strom-Spannungs-Kennlinie

Infolge der extrem kurzen Einschwingzeiten des Josephsonkontaktes von  $10^{-11}$  bis  $10^{-10}$  Sekunden und der ebenfalls im Pikosekundenbereich liegenden Periode  $2\pi/\Omega_0$  der Strom- und Spannungssoszillationen sind experimentell gegenwärtig nur die Gleichanteile  $\hat{i}_0$  und  $\omega_0/2$  bestimmbar. Im Gegensatz zu den Wechselanteilen besteht zwischen ihnen eine nichtlineare Abhängigkeit. Wir haben die  $\hat{i}_0 - \frac{\omega_0}{2}$ -Charakteristiken im

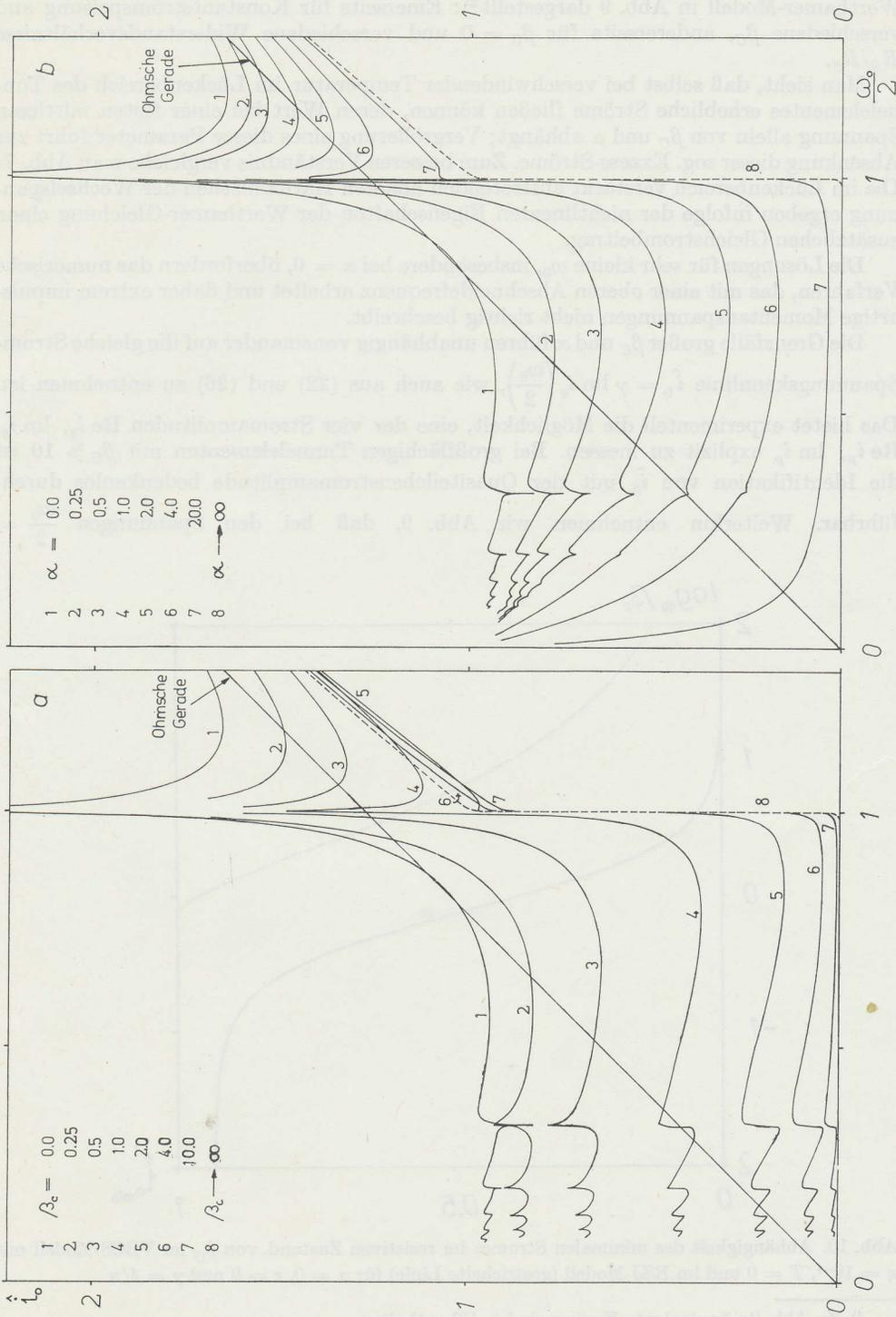


Abb. 9. Strom-Spannungs-Kennlinien für den symmetrischen VBCS-Kontakt ( $T = 0, \eta = 10^{-4}$ ): a) Konstantstromspeisung  $\alpha = 0, \beta_G$  variabel; b)  $\alpha$  variabel,  $\beta_G = 0$

Werthamer-Modell in Abb. 9 dargestellt<sup>2)</sup>: Einerseits für Konstantstromspeisung und verschiedene  $\beta_C$ , andererseits für  $\beta_C = 0$  und verschiedene Widerstandsverhältnisse  $R_N/R_S$ .

Man sieht, daß selbst bei verschwindender Temperatur im Lückenbereich des Tunnелеlementes erhebliche Ströme fließen können, deren Wert bei einer festen mittleren Spannung allein von  $\beta_C$  und  $\alpha$  abhängt; Vergrößerung eines dieser Parameter führt zur Absenkung dieser sog. Exzess-Ströme. Zum besseren Verständnis vergleiche man Abb. 7: Die im Lückenbereich verstärkt auftretenden höheren Harmonischen der Wechselspannung ergeben infolge der nichtlinearen Eigenschaften der Werthamer-Gleichung einen zusätzlichen Gleichstrombeitrag.

Die Lösungen für sehr kleine  $\omega_0$ , insbesondere bei  $\alpha = 0$ , überfordern das numerische Verfahren, das mit einer oberen Abschneidefrequenz arbeitet und daher extrem impulsartige Momentanspannungen nicht richtig beschreibt.

Die Grenzfälle großer  $\beta_C$  und  $\alpha$  führen unabhängig voneinander auf die gleiche Strom-Spannungskennlinie  $\hat{i}_0 = \gamma \ln i_q \left( \frac{\omega_0}{2} \right)$ , wie auch aus (22) und (26) zu entnehmen ist. Das bietet experimentell die Möglichkeit, eine der vier Stromamplituden  $\text{Re } i_q$ ,  $\text{Im } i_q$ ,  $\text{Re } i_p$ ,  $\text{Im } i_p$  explizit zu messen. Bei großflächigen Tunnелеlementen mit  $\beta_C \gg 10$  ist die Identifikation von  $\hat{i}_0$  mit der Quasiteilchenstromamplitude bedenkenlos durchführbar. Weiterhin entnehmen wir Abb. 9, daß bei den Spannungen  $\frac{\omega_0}{2} =$

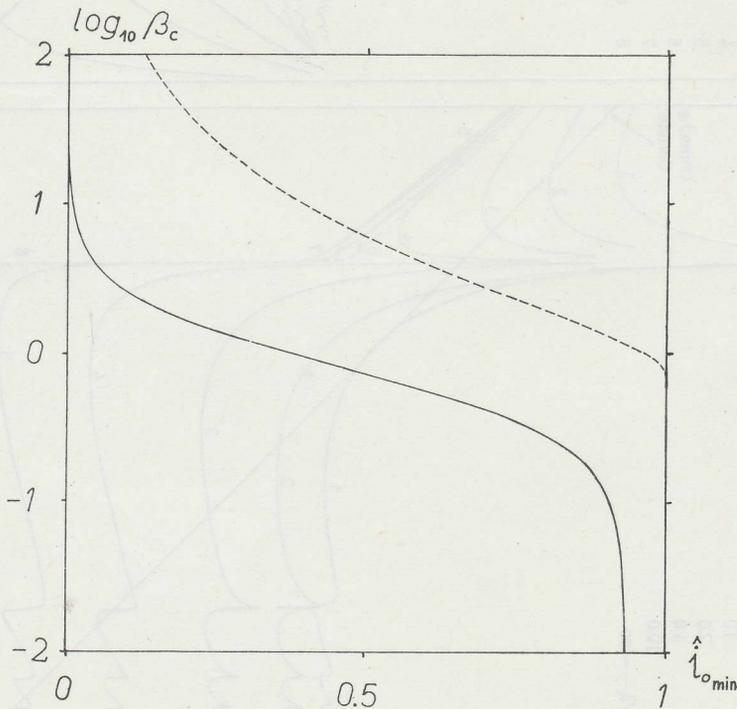


Abb. 10. Abhängigkeit des minimalen Stromes im resistiven Zustand von  $\beta_C$  im VBCS-Modell mit  $\eta = 10^{-4}$ ,  $T = 0$  und im RSJ-Modell (gestrichelte Linie) für  $\alpha = 0$ ,  $\varepsilon = 0$  und  $\gamma = 4/\pi$

<sup>2)</sup> Zu Abb. 9a äquivalente Kurven sind in [2] enthalten.

$1/3, 1/5, 1/7, \dots$  sog. „subharmonische Strukturen“ der Energielücke auftreten, als Folge des Riedelpeaks in  $\text{Re } i_p(\omega)$  bei  $\omega = 1$ . Diese Feinstrukturen sind in der Regel experimentell kaum zu beobachten, sie verschwinden sehr schnell bei zunehmender Verrundung der Stromresponsefunktionen ( $\eta \gtrsim 10^{-3}$ ). Am Summenanstieg zeichnet sich eine deutliche Kniestruktur ab, die in gleicher Weise empfindlich auf Veränderungen von  $\eta$  reagiert. Im Gegensatz dazu sind die Exzess-Ströme kaum von  $\eta$  abhängig. Zur quantitativen Auswertung wird üblicherweise der minimale Stromwert  $\hat{i}_{0\text{min}}$  im resistiven Zustand in Abhängigkeit von  $\log \beta_C$  dargestellt (Abb. 10). Die Kurve für das Werthamer-Modell bei  $T = 0$  geht für  $T \rightarrow T_C$  in die RSJ-Kurve über, welche bei festem  $\beta_C$  immer einen größeren Wert  $\hat{i}_{0\text{min}}$  zeigt.

In Einklang mit der Diskussion aus Abschn. 2.2. kann auch folgende Interpretation gegeben werden: Faßt man die Werthamer-Formel (5), (6) als universelle Bewegungsgleichung für die Phasendifferenz  $\varphi(s)$  einer schwach supraleitenden Verbindung und die Stromresponsefunktionen  $i_p(\omega)$  und  $i_q(\omega)$  als Modellgrößen zur Beschreibung der Materialeigenschaften dieser Verbindung auf, so charakterisieren beide Kurven die Extremfälle eines Josephson-Tunnelements und einer supraleitenden Brücke.

Mit Hilfe von Abb. 10 ist dadurch eine Klassifikation experimentell untersuchter Josephsonkontakte bezüglich dieser beiden Grundtypen möglich.

#### 4. Schlußbemerkung

Bei der Untersuchung periodischer Lösungen der Werthamer-Gleichung werden Einschwingvorgänge, wie sie beim Einschalten des Stromes auftreten, nicht erfaßt. Sind diese von Interesse, läßt sich die Lösung der Integrodifferentialgleichung im Zeitbereich nicht umgehen [19–21].

Solange man jedoch nur Aussagen über das stationäre Verhalten benötigt, ist der in dieser Arbeit benutzte Zugang direkter und numerisch weniger zeitaufwendig. Unter diesem Gesichtspunkt sollte es auch möglich sein, kompliziertere supraleitende Strukturen mit der Werthamer-Theorie zu beschreiben.

#### Literaturverzeichnis

- [1] WERTHAMER, N. R.: Phys. Rev. **147** (1966) 255.
- [2] McDONALD, D. G.; JOHNSON, E. G.; HARRIS, R. E.: Phys. Rev. **B 13** (1976) 1028.
- [3] HARRIS, R. E.: Phys. Rev. **B 13** (1976) 3818.
- [4] SCHLUP, W. A.: Phys. Rev. **B 18** (1978) 6132.
- [5] STEWART, W. C.: Appl. Phys. Lett. **12** (1968) 277; McCUMBER, D. E.: J. Appl. Phys. **39** (1968) 3113.
- [6] LEVINSSEN, M. T.; CHIAO, R. Y.; FELDMAN, M. J.; TUCKER, B. A.: Appl. Phys. Lett. **31** (1977) 776.
- [7] TUCKER, J. R.: IEEE J. Quant. Electron. **15** (1979) 1234; Appl. Phys. Lett. **36** (1980) 477.
- [8] POULSON, U. K.: Report No. 121, Lyngby (1973).
- [9] HARRIS, R. E.: Phys. Rev. **B 10** (1974) 84.
- [10] ZORIN, A. B.; KULIK, I. O.; LIKHAREV, K. K.; SCHRIEFFER, J. R.: Fiz. Nizk. Temp. **5** (1979) 1138.
- [11] BUCKNER, S. A.; LANGENBERG, D. N.: J. Low Temp. Phys. **22** (1976) 569.
- [12] BELYKH, V. N.; PEDERSON, N. F.; SOERENSEN, O. H.: Phys. Rev. **B 16** (1977) 4853.
- [13] ASLAMASOV, L. G.; LARKIN, A. I.: Pis'ma Zh. Exp. Teor. Fiz. **9** (1969) 150.
- [14] PLISS, V. A.: Nonlocal problems of the theory of oscillations, Academic Press, New York, 1966.

[15] ABIDI, A. A.; CHUA, L. O.: IEE J. Electron. Circuits & Syst. **3** (1979) 186.  
 [16] FARMER, J. D.: Physics D **4** (1982) 366.  
 [17] LIU, I.; LEE, Y. C.: J. Low Temp. Phys. **44** (1981) 11.  
 [18] PETERSON, R. L.; McDONALD, D. G.: IEEE Trans. Magn. **13** (1977) 887.  
 [19] HARRIS, R. E.: J. Appl. Phys. **48** (1977) 5188.  
 [20] GAYLEY, R. I.: J. Appl. Phys. **52** (1981) 1411.  
 [21] DE LUSTRAC, A.; CROZAT, P.; ADDE, R.: IEEE Trans. Magn. **19** (1983) 1221.

Bei der Redaktion eingegangen am 5. Juli 1984.

Anshr. d. Verf.: Dipl-Phys. M. RIEDEL, Dr. H.-G. MEYER und Dr. W. KRECH  
 Sektion Physik der Friedrich-Schiller-Universität  
 DDR-6900 Jena  
 Max-Wien-Platz 1