Universität Potsdam
Institut für Mathematik

WS 2010

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Mathematik I für Geoökologen und Geowissenschaftler“

#5

Letzter Abgabetermin: 22. 11. 2010

1. Gegeben seien die quadratischen Matrizen $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 12 \\ -7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.
   a) Berechnen Sie $A \cdot B$ und $B \cdot A$!
   b) Sei $A \in \mathbb{R}_{n,n}$. Was leistet eine beliebige Diagonalmatrix $B \in \mathbb{R}_{n,n}$ bei Multiplikation von rechts bzw. von links mit A?

   (3 Punkte)

2. Gegeben seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -17 \end{pmatrix}$.
   a) Zeigen Sie, dass diese Vektoren linear unabhängig sind!
   b) Zeigen Sie, dass sich jeder Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 gemäß $b = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ mit reellen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ darstellen lässt! Wie lauten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$?

   (6 Punkte)

3. Gegeben seien Vektoren $v_i \in \mathbb{R}^4, i = 1, \cdots, 4$ mit
$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   a) Zeigen Sie, dass diese vier Vektoren linear abhängig sind!
   b) Kann v_4 durch einen geeigneten Vektor $\tilde{v}_4$ ersetzt werden, so dass das System $\{v_1, v_2, v_3, \tilde{v}_4\}$ linear unabhängig ist? Begründen Sie Ihre Entscheidung

   (5 Punkte)

4. In der Vorlesung haben Sie den Begriff Vektorraum kennengelernt. Zeigen Sie, dass die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ einen Vektorraum über $\mathbb{C}$ selbst bilden!

   (2 Punkte)