

# Fourier-Reihen

Thomas Peters  
Thomas' Mathe-Seiten  
[www.mathe-seiten.de](http://www.mathe-seiten.de)

1. Dezember 2004

Dieser Artikel gibt eine elementare Einführung in die Theorie der Fourier-Reihen. Er beginnt mit einer kurzen Analyse des Problems, Funktionen als unendliche Reihe trigonometrischer Funktionen darzustellen, wonach die benötigten Orthogonalitätsrelationen und Koeffizientenformeln hergeleitet werden. Auch die Fourier-Reihe in komplexer Darstellung wird behandelt. Danach folgt ein Kapitel, in dem einige einfache Beispiele durchgerechnet werden. Das dabei beobachtete Gibbs'sche Phänomen wird daraufhin genauer untersucht. Dann wird auf den Zusammenhang zwischen Fourier-Reihen und Taylor- sowie Laurent-Reihen eingegangen. Weiter wird die Partialbruchzerlegung des Cotangens hergeleitet. Zum Abschluss werden die erhaltenen Gleichungen benutzt, um Formeln für die Kreiszahl  $\pi$  abzuleiten.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>4</b>
<b>1 Die Idee der Fourier-Reihen</b>	<b>5</b>
1.1 Einführung . . . . .	5
1.2 Orthogonalitätsrelationen . . . . .	6
1.3 Bestimmung der Koeffizienten . . . . .	7
1.4 Funktionen mit beliebiger Periode . . . . .	8
1.5 Komplexe Schreibweise . . . . .	8
1.6 Konvergenz . . . . .	9
<b>2 Beispiele</b>	<b>11</b>
2.1 Rechteckschwingung . . . . .	11
2.2 Kippschwingung . . . . .	11
2.3 Dreiecksschwingung . . . . .	12
<b>3 Das Gibbs'sche Phänomen</b>	<b>14</b>
<b>4 Taylor- und Laurent-Reihen</b>	<b>16</b>
4.1 Taylor-Reihen . . . . .	16
4.2 Laurent-Reihen . . . . .	17
<b>5 Die Partialbruchzerlegung des Cotangens</b>	<b>18</b>
<b>6 Fourier-Reihen und <math>\pi</math></b>	<b>19</b>
<b>Index</b>	<b>21</b>

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Die Fourier-Reihen der Rechteckschwingung für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 20$ . . . . .	12
2.2	Die Fourier-Reihen der Kippschwingung für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 20$ . . . . .	12
2.3	Die Fourier-Reihen der Dreiecksschwingung für $n = 1$ und $n = 10$ . . . . .	13

# 1 Die Idee der Fourier-Reihen

## 1.1 Einführung

Der Gedanke, eine Funktion mit Hilfe anderer Funktionen darzustellen, ist in der Analysis von fundamentaler Bedeutung. Am bekanntesten dürfte wohl die Darstellung mittels Taylor-Reihen sein, bei der eine Funktion in eine Potenzreihe entwickelt wird. Nicht weniger wichtig ist die Entwicklung in ein *trigonometrisches Polynom*, d. h. unser Ziel ist die Darstellung einer Funktion mittels trigonometrischer Funktionen. Eine solches Vorgehen wird als *harmonische Analyse* bezeichnet.

Nun lehrt die Mathematik, dass eine solche Entwicklung weder gelingen, noch dass sie, sollte sie existieren, in jedem Punkt mit der Ausgangsfunktion übereinstimmen muss. Die Untersuchung der hinreichenden und notwendigen Bedingungen für den Erfolg der harmonischen Analyse ist eine sehr anspruchsvolle Aufgabe in der Analysis und soll hier nicht einmal gestreift werden. Wir gehen stets davon aus, dass unsere Funktionen in gewissem Sinne „gutartig“ sind.

Die Umkehrung der harmonischen Analyse (welche auch als Fourier-Analyse bezeichnet wird), ist die *Fourier-Synthese*. Hier geht man genau umgekehrt vor: Es wird eine Fourier-Reihe vorgelegt, und die Frage lautet nach der zu Grunde liegenden Funktion. Wir behandeln jedoch nur die Fourier-Analyse.

Sei nun also eine reelle Funktion  $f$  gegeben, so machen wir zunächst den allgemeinen Ansatz

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cos(nx + \varphi_n).$$

Aufgrund des Additionstheorems

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

können wir dies umformen zu

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cos(nx + \varphi_n) &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n (\cos nx \cos \varphi_n - \sin nx \sin \varphi_n) \\ &= d_0 \cos \varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n (\cos \varphi_n \cos nx - \sin \varphi_n \sin nx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \end{aligned}$$

mit  $a_0/2 = d_0 \cos \varphi_0$ ,  $a_n = d_n \cos \varphi_n$  und  $b_n = -d_n \sin \varphi_n$ . Wir können also die Funktion  $f$  darstellen als eine Summe von Cosinus- und Sinus-Funktionen. Wieso wir hier  $a_0/2$  statt  $a_0$  wählen, wird in Abschnitt 1.3 ersichtlich werden.

## 1.2 Orthogonalitätsrelationen

Bevor wir uns nun überlegen, wie wir die Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  berechnen können, benötigen wir die *Orthogonalitätsrelationen* der trigonometrischen Funktionen. Für  $m, n \in \mathbb{N}$  gilt zunächst für  $m \neq n$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m+n)x) + \cos((m-n)x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin((m+n)x)}{m+n} + \frac{\sin((m-n)x)}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{\sin((m+n)\pi)}{m+n} + \frac{\sin((m-n)\pi)}{m-n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

und für  $m = n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos nx \, dx = \left[ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4n} \sin 2nx \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

so dass man insgesamt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} \pi & \text{für } m = n \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{cases}$$

erhält. Auf ähnliche Weise erhält man die weiteren Orthogonalitätsrelationen

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= \begin{cases} \pi & \text{für } m = n \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{cases}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx &= 0. \end{aligned}$$

Die Bezeichnung „Orthogonalitätsrelationen“ kommt daher, dass durch

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

ein Skalarprodukt definiert wird. Die Orthogonalitätsrelationen sagen dann gerade, dass die Funktionen  $\cos mx$  und  $\sin nx$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.

## 1.3 Bestimmung der Koeffizienten

Nun können wir unser Ziel in Angriff nehmen. Gehen wir aus von der Gleichung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

wobei  $f$  zunächst eine  $2\pi$ -periodische Funktion ist, so ergibt eine Multiplikation mit  $\cos mx$  und Integration über  $[-\pi, \pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx.$$

Für  $m = 0$  erhält man somit unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsrelationen

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

und für  $m > 0$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx.$$

Eine Multiplikation mit  $\sin mx$  ergibt analog

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \sin mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx,$$

was auf

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx$$

führt. Man sieht nun schön, dass durch die geschickte Wahl von  $a_0$  zu Beginn die Koeffizienten durch die zwei Gleichungen

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

gegeben sind.

Von praktischer Bedeutung für die Berechnung der Koeffizienten ist noch, dass für gerade Funktionen mit  $f(x) = f(-x)$  die  $b_n$  stets verschwinden, wohingegen bei ungeraden Funktionen  $f(x) = -f(-x)$  die  $a_n$  verschwinden.

## 1.4 Funktionen mit beliebiger Periode

Ist die Funktion  $f$  nicht  $2\pi$ -periodisch, sondern hat sie die Periode  $T = 2\pi/\omega$ , d. h. es gilt  $f(x + T) = f(x)$ , so erfüllt  $t = \omega x$  offenbar  $f((t + 2\pi)/\omega) = f(t/\omega)$ . Die Funktion  $\tilde{f}(t) = f(t/\omega)$  hat somit die Periode  $2\pi$ , und wir können unsere bekannten Koeffizientenformeln anwenden. Es folgt mit der Substitution  $x = t/\omega$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t) \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t/\omega) \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(n\omega x) \omega \, dx \\ &= \frac{\omega}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos n\omega x \, dx = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos n\omega x \, dx. \end{aligned}$$

Für eine Funktion  $f$  mit Periode  $T = 2\pi/\omega$  gelten also die Koeffizientenformeln

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos n\omega x \, dx \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin n\omega x \, dx. \end{aligned}$$

Diese liefern dann die Reihendarstellung

$$\tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

bzw.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x.$$

Da obige Substitution immer möglich ist, gehen wir im Folgenden von  $2\pi$ -periodischen Funktionen aus.

## 1.5 Komplexe Schreibweise

Man kann die Fourier-Reihe mit Hilfe komplexer Zahlen elegant schreiben als

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Dies kann man folgendermaßen einsehen: Man teilt zunächst die Summe auf in

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{inx} \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\cos nx + i \sin nx) + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (\cos nx + i \sin nx) \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\cos nx + i \sin nx) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (\cos nx - i \sin nx) \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + c_{-n}) \cos nx + i(c_n - c_{-n}) \sin nx.
 \end{aligned}$$

Man erhält dann durch Koeffizientenvergleich

$$a_0 = 2c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

bzw.

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Natürlich kann man die komplexen Koeffizienten  $c_n$  auch berechnen, ohne zuvor die reellen Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  berechnet zu haben. Es gilt nämlich

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx - i \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx.$$

## 1.6 Konvergenz

Wir gehen nun folgender Frage nach: Angenommen, wir approximieren eine Funktion  $f$  mit der Periode  $2\pi$  durch eine Summe

$$f_k(x) = \sum_{n=-k}^k c_n e^{inx},$$

wie muss man die Koeffizienten  $c_n$  wählen, damit der Ausdruck

$$F = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_k(x)|^2 \, dx$$

minimal wird? Da für eine komplexe Zahl  $z$  gilt  $|z|^2 = z\bar{z}$ , können wir ausmultiplizieren

$$F = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{f(x)} \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{f_k(x)} \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} f_k(x) \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} f_k(x) \overline{f_k(x)} \, dx$$

und einsetzen

$$F = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{n=-k}^k \overline{c_n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx - \sum_{n=-k}^k c_n \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} e^{inx} dx + 2\pi \sum_{n=-k}^k c_n \overline{c_n}.$$

Fasst man nun die  $c_n$  als unabhängige Variablen auf, so kann man  $F$  nach diesen differenzieren. Da  $F$  minimal sein soll, müssen diese Ableitungen verschwinden.

$$\frac{\partial F}{\partial c_n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{c_n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} e^{inx} dx \quad \Rightarrow \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Wir sehen also, dass die Fourier-Koeffizienten gerade so gewählt sind, dass  $F$  minimal wird. Man kann sogar zeigen, dass für „fast jede“ Funktion  $F$  mit wachsendem  $k$  gegen 0 konvergiert. Man sagt, dass die Fourier-Reihe *im quadratischen Mittel* gegen  $f$  konvergiert.

Setzen wir nun den Ausdruck für die  $c_n$  in  $F$  ein, so erhalten wir

$$F = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-k}^k \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \right|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - 2\pi \sum_{n=-k}^k |c_n|^2$$

und somit

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_k(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - 2\pi \left( \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) \right).$$

Da die linke Seite dieser Gleichung sicherlich positiv ist, folgt die *Bessel'sche Ungleichung*

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Insbesondere gilt im Limes  $k \rightarrow \infty$

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx,$$

und daher konvergieren die Fourier-Koeffizienten gegen Null. Gilt zusätzlich noch, dass die Fourier-Reihe im quadratischen Mittel gegen  $f$  konvergiert, so verschwindet  $F$ , und die Ungleichung wird zur *Parseval'schen Gleichung*

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

bzw. in komplexer Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

## 2 Beispiele

Wir rechnen nun einige einfache Beispiele für reelle Fourier-Reihen durch. Die behandelten Funktionen sind dabei stets als  $2\pi$ -periodisch anzunehmen.

### 2.1 Rechteckschwingung

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 0 & x = -\pi, 0, \pi \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

nennt man *Rechteckschwingung*. Da die Funktion ungerade ist, können wir uns auf die Berechnung der  $b_n$  beschränken. Diese ergibt

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{n} - \frac{\cos n\pi}{n} \right) = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{4}{\pi n} & n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Die Rechteckschwingung hat also die Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

Abbildung 2.1 zeigt einige Näherungen. Es fällt auf, dass an den Unstetigkeitsstellen das Konvergenzverhalten der Fourier-Reihe nachlässt. Dieses Verhalten heißt *Gibbs'sches Phänomen* und tritt auf, weil die Koeffizienten nicht schnell genug gegen Null gehen.

### 2.2 Kippschwingung

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & -\pi < x < \pi \\ 0 & x = -\pi, \pi \end{cases}$$

heißt *Kippschwingung*<sup>1</sup>. Auch hier reicht die Berechnung der  $b_n$ , für die man

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx = \frac{2}{\pi} \left( -\frac{\pi \cos n\pi}{n} \right) = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

---

<sup>1</sup>Die Kippschwingung wird manchmal auch als *Sägezahnschwingung* bezeichnet.

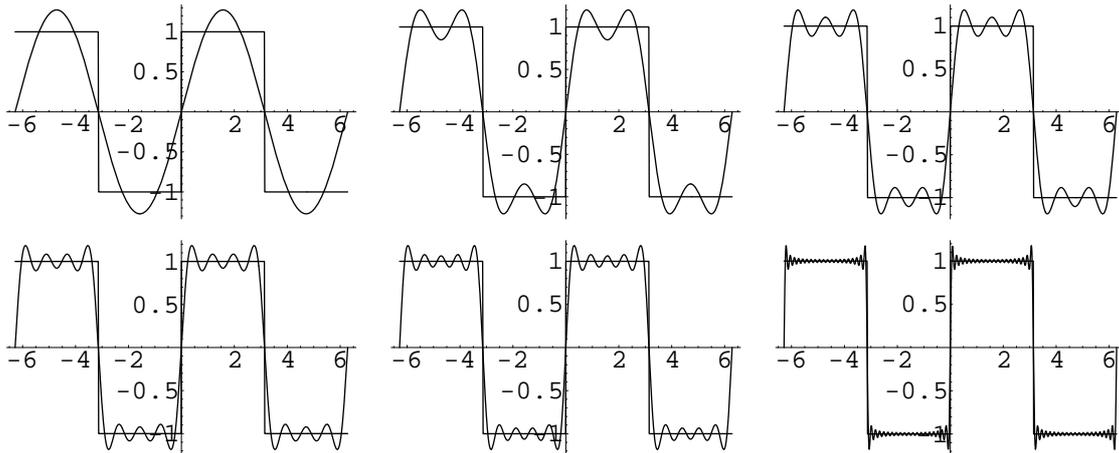


Abbildung 2.1: Die Fourier-Reihen der Rechteckschwingung für  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 20$ .

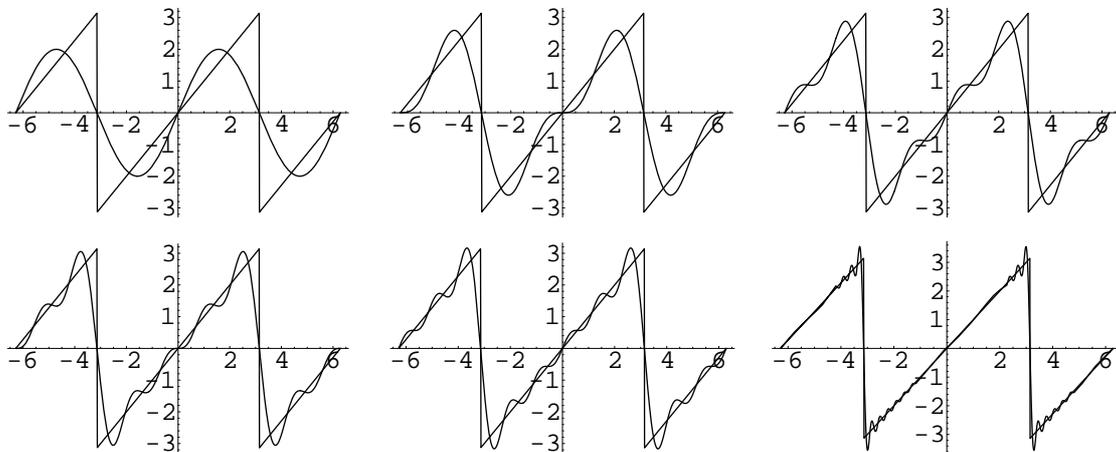


Abbildung 2.2: Die Fourier-Reihen der Kippschwingung für  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 20$ .

erhält. Die Fourier-Reihe ist damit

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}.$$

Abbildung 2.2 zeigt das Ergebnis.

## 2.3 Dreiecksschwingung

Die Dreiecksschwingung erhält man durch die Funktion  $f(x) = |x|$ . Diese ist nun gerade, so dass wir

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$$

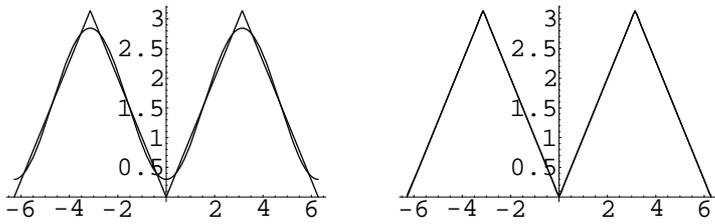


Abbildung 2.3: Die Fourier-Reihen der Dreiecksschwingung für  $n = 1$  und  $n = 10$ .

und

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ -\frac{4}{\pi k^2} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

brauchen. Die Fourier-Reihe ist also

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

Wie man an [Abbildung 2.3](#) sieht, tritt hier das Gibbs'sche Phänomen nicht auf, da die Koeffizienten schnell genug klein werden.

### 3 Das Gibbs'sche Phänomen

Wir untersuchen nun das im letzten Abschnitt beobachtete Gibbs'sche Phänomen näher. Wir machen das am Beispiel der Rechteckschwingung

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x)$$

mit den Partialsummen

$$s_k(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^k \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

Diese Partialsummen lassen sich umformen zu

$$s_k(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^k \int_0^x \cos(2n-1)t \, dt = \frac{4}{\pi} \int_0^x \sum_{n=1}^k \cos(2n-1)t \, dt.$$

Die Summe lässt sich leicht ausrechnen, wenn man den Cosinus als Exponentialfunktion schreibt und die geometrische Summenformel anwendet. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k \cos(2n-1)t &= \sum_{n=1}^k \frac{e^{i(2n-1)t} + e^{-i(2n-1)t}}{2} = \frac{1}{2} \left( e^{-it} \sum_{n=1}^k e^{2int} + e^{it} \sum_{n=1}^k e^{-2int} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( e^{-it} \frac{e^{2it} - e^{2i(k+1)t}}{1 - e^{2it}} + e^{it} \frac{e^{-2it} - e^{-2i(k+1)t}}{1 - e^{-2it}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( e^{-it} \frac{1 - e^{2ikt}}{e^{-2it} - 1} + e^{it} \frac{1 - e^{-2ikt}}{e^{2it} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1 - e^{2ikt}}{e^{-it} - e^{it}} + \frac{1 - e^{-2ikt}}{e^{it} - e^{-it}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( e^{ikt} \frac{e^{-ikt} - e^{ikt}}{e^{-it} - e^{it}} + e^{-ikt} \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{e^{it} - e^{-it}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin kt}{\sin t} (e^{ikt} + e^{-ikt}) = \frac{\sin kt \cos kt}{\sin t} = \frac{1}{2} \frac{\sin 2kt}{\sin t}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$s_k(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2kt}{\sin t} \, dt.$$

Für  $|2kx| \leq \pi$  kann man abschätzen

$$\int_0^x \frac{\sin 2kt}{\sin t} dt > \int_0^x \frac{\sin 2kt}{t} dt = \int_0^{2kx} \frac{\sin s}{s} ds$$

mit der Substitution  $2kt = s$ , also insgesamt

$$s_k(x) > \frac{2}{\pi} \int_0^{2kx} \frac{\sin s}{s} ds = \frac{2}{\pi} \text{Si}(2kx)$$

mit dem Integralsinus

$$\text{Si}(u) = \int_0^u \frac{\sin s}{s} ds.$$

Der Integralsinus hat bei  $u = \pi$  ein Maximum mit  $\text{Si}(\pi) \approx 1,852$ . Dem Intervall  $|u| \leq \pi$  entspricht nun ein Intervall  $|x| \leq \pi/(2k)$ , auf dem die Partialsumme wie oben angegeben nach unten abgeschätzt werden kann. Das zeigt, dass für beliebig großes  $k$  immer noch ein Intervall um  $x = 0$  existiert mit  $|s_k(x)| > 1$ . Dieser Wert konvergiert mit  $k \rightarrow \infty$  gegen  $2/\pi \text{Si}(\pi) \approx 1,179$ .

## 4 Taylor- und Laurent-Reihen

Fourier-Reihen gehören neben den Taylor- und Laurent-Reihen zu den wichtigsten Reihen in der Mathematik. Es liegt daher nahe, nach Zusammenhängen zwischen diesen zu suchen. Diese offenbaren sich am leichtesten im Reich der komplexen Zahlen.

### 4.1 Taylor-Reihen

Wir machen uns die Verbindung zwischen Fourier- und Taylor-Reihen an einem Beispiel klar. Da eine Funktion, die in eine Taylor-Reihe entwickelt werden soll, wenigstens hinreichend oft differenzierbar sein muss, taugen unsere vorigen Beispiele nichts. Wir wollen das Beispiel aber auch nicht unnötig kompliziert wählen, so dass wir uns auf eine Funktion zurückziehen, deren Taylor-Reihe man gut kennt.

Die einfachste unendliche Reihe überhaupt ist wohl die geometrische Reihe, welche

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

für  $|z| < 1$  erfüllt. Diese Reihe ist gerade die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

im Punkte  $z = 0$ . Wir können nun durch geschickte Manipulation der Reihe sogleich die Fourier-Reihe von  $f$  bestimmen. Dazu schreiben wir  $z$  in der Form  $z = re^{i\varphi}$  und rechnen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (re^{i\varphi})^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\varphi + i \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\varphi.$$

Aus dieser Darstellung kann man nun die Koeffizienten direkt ablesen. Man beachte, dass wir  $f$  über  $\varphi$ , also dem Argument von  $z$ , entwickelt haben, so dass natürlicherweise  $\varphi \in [0, 2\pi]$  gilt. Die Koeffizienten hängen nur vom Radius, nicht vom Winkel ab.

Diese Ableitung ist zwar formal korrekt, liefert uns aber nicht das, was wir erhofft hatten. Wir haben nämlich  $f$  nicht als Fourier-Reihe über  $z$ , sondern als Fourier-Reihe über  $\varphi$  erhalten. Wir müssen deshalb  $f$  als Funktion von  $\varphi$  schreiben, indem wir  $r$  konstant lassen. Dann ist

$$f(\varphi) = \frac{1}{1 - r \cos \varphi - ri \sin \varphi} = \frac{1 - r \cos \varphi}{(1 - r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2} + i \frac{r \sin \varphi}{(1 - r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2}.$$

Wenn wir nun entsprechende Real- und Imaginärteile miteinander identifizieren, erhalten wir

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\varphi = \frac{1 - r \cos \varphi}{1 + r^2 - 2r \cos \varphi}$$

sowie

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\varphi = \frac{r \sin \varphi}{1 + r^2 - 2r \cos \varphi}.$$

## 4.2 Laurent-Reihen

Ganz anderer Natur ist der Zusammenhang zwischen Fourier-Reihen und Laurent-Reihen. Bisher haben wir im Wesentlichen Funktionen einer reellen Veränderlichen  $x$  betrachtet, von denen wir annahmen, sie seien  $T = 2\pi$ -periodisch. Lassen wir nun eine komplexe Variable  $z$  zu, so kann die (nun komplexe) Periode  $T$  natürlich in eine beliebige Richtung zeigen und muss nicht eine reelle Zahl sein<sup>1</sup>. Ähnlich wie im reellen Fall können wir uns aber wieder ohne Einschränkung auf den Fall  $T = 2\pi$  zurückziehen, denn dies lässt sich stets durch eine geeignete Substitution erreichen.

Wir betrachten nun einen Streifen  $S_{a,b} = \{z \in \mathbb{C} \mid a < \operatorname{Im} z < b\}$  und eine komplexe Funktion  $f: S_{a,b} \rightarrow \mathbb{C}$  mit Periode  $2\pi$ . Die Funktion  $g: S_{a,b} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $g(z) = e^{iz}$  bildet wegen  $e^{iz} = e^{-y}e^{ix}$  den Streifen  $S_{a,b}$  auf den Kreisring  $K_{c,d} = \{z \in \mathbb{C} \mid c < |z| < d\}$  ab mit  $c = e^{-b}$  und  $d = e^{-a}$ . Man kann nun zeigen, dass es genau eine komplexe Funktion  $\tilde{f}: K_{c,d} \rightarrow \mathbb{C}$  gibt mit  $f(z) = \tilde{f}(g(z)) = \tilde{f}(e^{iz})$ . Man beachte, dass die  $2\pi i$ -Periodizität der Exponentialfunktion hier keine Probleme macht, da  $f$  ja  $2\pi$ -periodisch ist.

Die Funktion  $\tilde{f}$  ist aber auf einem Kreisring erklärt und besitzt somit eine Darstellung als Laurent-Reihe der Form

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

welche auf der Kreisscheibe konvergiert. Damit ergibt sich sofort die Fourier-Reihe von  $f$  zu

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inz}.$$

Dies ist nun anders als vorhin eine echte Verbindung zwischen Laurent- und Fourier-Reihen, denn die Fourier-Reihe ist ebenfalls bzgl.  $z$  gebildet.

---

<sup>1</sup>Tatsächlich gibt es komplexe Funktionen, die in zwei verschiedenen Richtungen periodisch sind.

## 5 Die Partialbruchzerlegung des Cotangens

Betrachten wir die Funktion  $f(x) = \cos yx$  mit  $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , die auf  $[-\pi, \pi]$  definiert und darüber hinaus  $2\pi$ -periodisch fortgesetzt sei. Da  $f$  gerade ist, ist  $b_n = 0$  für alle  $n$ , und man erhält weiter

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos yx \cos nx \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+y)x) + \cos((n-y)x) \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin((n+y)x)}{n+y} + \frac{\sin((n-y)x)}{n-y} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sin((n+y)\pi)}{n+y} + \frac{\sin((n-y)\pi)}{n-y} \right). \end{aligned}$$

Berücksichtigt man das Additionstheorem

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$\sin n\pi = 0$  sowie  $\cos n\pi = (-1)^n$ , so bekommt man nach Zusammenfassen der Brüche

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n y \sin \pi y}{y^2 - n^2}.$$

Daraus folgt die Darstellung

$$\cos yx = \frac{y \sin \pi y}{\pi} \left( \frac{1}{y^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \cos nx}{y^2 - n^2} \right).$$

Setzt man hier  $x = \pi$ , so erhält man unmittelbar die berühmte *Partialbruchzerlegung des Cotangens*

$$\pi \cot \pi y = \frac{1}{y} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2y}{y^2 - n^2}.$$

## 6 Fourier-Reihen und $\pi$

Wir werden nun Fourier-Reihen benutzen, um Formeln für die Kreiszahl  $\pi$  zu gewinnen. Einige Schritte haben wir dazu schon getan. So folgt aus der Fourier-Reihe der Kippsschwingung (siehe Abschnitt 2.2) mit  $x = \pi/2$

$$\frac{\pi}{2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n\pi/2}{n},$$

was nach Division durch 2 in

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n\pi/2}{n} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots$$

übergeht. Dies ist die bekannte Reihe von Leibniz.

Mit Hilfe der Dreiecksschwingung (Abschnitt 2.3) können wir für  $x = 0$  die Gleichung

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

durch Multiplikation mit  $-\pi/4$  nach

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

überführen.

Die bekannteste  $\pi$ -Formel in der Fourier-Theorie erhält man jedoch aus der Fourier-Reihe von  $f(x) = x^2$ . Da diese gerade ist, berechnen wir

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2$$

und

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2x}{n^2} \cos nx + \left( \frac{x^2}{n} - \frac{2}{n^3} \right) \sin nx \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2\pi}{n^2} (-1)^n \right] = \frac{4}{n^2} (-1)^n, \end{aligned}$$

woraus sich die Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

ergibt. Mit  $x = 0$  wird daraus

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \pm \dots$$

Subtrahiert man das von der  $\pi$ -Formel der Dreiecksschwingung, so erhält man

$$\frac{\pi^2}{24} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots$$

Multipliziert man schließlich noch mit 4, so bekommt man das Ergebnis

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Man kann also für die Summe der Kehrwerte der Quadratzahlen (bzw. der Quadrate aller geraden und ungeraden Zahlen) die erstaunlichen Formeln

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{6} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ \frac{\pi^2}{24} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} \\ \frac{\pi^2}{8} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \end{aligned}$$

festhalten.

# Index

- Bessel'sche Ungleichung, 10
- Dreiecksschwingung, 12
- Fourier-Reihe
  - der Dreiecksschwingung, 13
  - der Kippschwingung, 12
  - der Rechteckschwingung, 11
  - komplexe, 8
  - reelle, 7
- Fourier-Synthese, 5
- Gibbs'sches Phänomen, 11, 14
- harmonische Analyse, 5
- Kippschwingung, 11
- Koeffizientenbestimmung, 7
- Laurent-Reihen, 17
- Orthogonalitätsrelationen, 6
- Parseval'sche Gleichung, 10
- Partialbruchzerlegung des Cotangens, 18
- Rechteckschwingung, 11
- Sägezahnschwingung, 11
- Taylor-Reihen, 16