Universität Potsdam
Institut für Mathematik

WS 2009/10

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Mathematik I für Geoökologen und Geowissenschaftler“

#5

Letzter Abgabetermin: 04. 12. 2009

1. $C[a,b]$ sei die Menge der im Intervall stetigen Funktionen. In dieser Menge wird eine Addition + und eine reelle Vervielfachung $\cdot$ für Funktionen $f,g \in C[a,b]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ erklärt:
   $+ : C[a,b] \times C[a,b] \to C[a,b]$ vermöge $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$ für $t \in [a,b]$,
   $\cdot : \mathbb{R} \times C[a,b] \to C[a,b]$ vermöge $(\lambda \cdot f)(t) = \lambda f(t)$ für $t \in [a,b]$.
   $V = (C[a,b], \mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Vektorraum.
   Die Menge $C^1[a,b]$ der (mindestens) einmal differenzierbaren Funktionen ist eine Teilmenge von $C[a,b]$. Zeigen Sie:
   a) $C^1[a,b]$ ist eine echte Teilmenge von $C[a,b]$, d.h. $C^1[a,b] \subset C[a,b]$!
   b) $U = (C^1[a,b], \mathbb{R}; \oplus, \odot)$ ist ein Untervektorraum von *V*! ($\oplus$ und $\odot$ sind die Einschränkungen der oben erklärten Addition und Vervielfachung auf die Menge der differenzierbaren Funktionen $C^1[a,b]$.)

   (6 Punkte)

2. Untersuchen Sie die gegebenen Vektoren *u*,*v* im $\mathbb{K}$-Vektorraum *V* auf lineare Unabhängigkeit!
   a) $V = \mathbb{C}^2$, $\quad \mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\quad u = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$,
   b) $V = \mathbb{C}^2$, $\quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\quad u = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$.

   (4 Punkte)

3. Bildet das System der drei Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$? Begründung!

   (3 Punkte)

4. Betrachtet werde der Vektorraum $(\mathbb{R}^{2\times 2}, \mathbb{R}, +, \cdot)$. Zeigen Sie: Die vier Matrizen
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   sind linear unabhängig!

   (3 Punkte)