

**Übungsaufgaben zur Vorlesung
„Mathematik II für Geoökologen und Geowissenschaftler“**

#2

Letzter Abgabetermin: 4. 5. 2010

1. Wiederholung zu linearen Abbildungen

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ und eine lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$x \mapsto \varphi(x) = Ax.$$

a) Vektoren $x \in \mathbb{R}^2$ werden in der $x_1 - x_2$ -Ebene durch Punkte dargestellt. Seien

$$x_1 \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \quad x_2 \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} \times \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

Stellen Sie alle so definierten Vektoren x in einem kartesischen $x_1 - x_2$ -Koordinatensystem (Originalebene) und alle Bilder $y = \varphi(x)$ dieser Vektoren in einem zweiten kartesischen Koordinatensystem (Bildebene) dar! Verwenden Sie für beide Koordinatensysteme die gleiche Achsenteilung!

b) Ermitteln Sie die Determinante von A sowie das charakteristische Polynom von A , indem Sie die Determinante $|A - \lambda I| =: \chi(\lambda)$ berechnen!

c) Berechnen Sie die Eigenwerte von A !

d) Zeichnen Sie in die Originalebene die Gerade durch den Ursprung und den

Vektor $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie in die Bildebene das Bild dieser Geraden ein!

Sie stellen fest: Original- und Bildgerade haben die gleiche Richtung.

e) Gibt es eine zweite Gerade mit dieser Eigenschaft?

(8 Punkte)

2. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ und eine lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ mit } x \mapsto \varphi(x) = Ax.$$

Welche (geometrische) Abbildung vermittelt φ ? (Führen Sie 1.a) z.B. für $\varphi = \frac{\pi}{3}$ aus!)

(3 Punkte)

3. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & q & q \end{pmatrix}$ mit dem reellen Parameter q .

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom!

b) Für welches q ist Null Eigenwert von A ? Bestimmen Sie für diesen Fall die restlichen Eigenwerte!

(5 Punkte)