Annalen der Physik. 7. Folge, Band 44, Heft 5, 1987, S. 329–339 J. A. Barth, Leipzig

Synchronisationseffekte in Anordnungen aus zwei Josephsonverbindungen mit endlichem McCumber-Parameter

Von W. Krech und M. Riedel

Sektion Physik der Friedrich-Schiller-Universität Jena, DDR

Inhaltsübersicht. Im RCSJ-Modell wird die mutuelle Synchronisation von zwei identischen Josephsonelementen mit endlichem McCumber-Parameter betrachtet, wobei die Kopplung durch einen gemeinsamen elektromagnetischen Shunt vermittelt wird. Dazu werden im Rahmen einer modifizierten Näherung der ersten Harmonischen sog. reduzierte Gleichungen langsam variierender Anteile der Josephsonphasen hergeleitet. Sie gestatten die Untersuchung der Stabilität von Kohärenzeigenschaften, die Berechnung der Toleranz der individuellen Stromspeisungen und eine Untersuchung der Leistungsabstrahlung. Analytisch gefundene Eigenschaften des phase-locking werden anhand numerisch berechneter Strom-Spannungs-Kennlinien diskutiert.

Synchronization Effects in Arrays of Two Josephson Junctions with Finite McCumber Parameter

Abstract. The mutual synchronization of two identical Josephson junctions with a finite McCumber parameter is considered within the RCSJ model, where the coupling is caused by a common electromagnetic shunt. For that reason reduced equations of the slowly varying parts of the Josephson phases are derived within the frame of a modified first harmonic approximation. They allow the investigation of the stability of coherence properties, the calculation of the tolerance of the individual current bias and the investigation of the oscillation power. Using numerical calculated current voltage characteristics analytical derived properties of the phase-locking are discussed.

1. Einleitung

Die mutuelle Synchronisation von Josephsonelementen ist eines der interessantesten Phänomene in der Physik der schwachen Supraleitung. Sie liefert eine vorteilhafte Methode zur Erhöhung der Strahlungsausgangsleistung von Josephsonoszillatoren sowie zur Überwindung der elektrodynamischen Fehlanpassung verfügbarer Einzelelemente an externe Impedanzen [1]. Das kollektive Verhalten von Zweifachanordnungen und darüber hinaus von vielkomponentigen linearen Ketten aus schwach supraleitenden Verbindungen ist wiederholt Gegenstand intensiver experimenteller (s. etwa [2–12]) als auch theoretischer Untersuchungen [12–23] gewesen. Letztere bezogen sich auf Kohärenzeffekte in Systemen aus Mikrobrücken, wurden also sehr zweckmäßig im Rahmen des sog. RSJ-Modells [24, 25] ohne „parasitäre" Kapazität durchgeführt. Da die Experimente mit Anordnungen aus planaren Mikrobrücken eine obere Limitierung der Strahlungsfrequenzen bei etwa 20 GHz zeigen [10, 12], wird neuerdings die Herstellung kooperativer Systeme mit Josephsonübergängen ohne direkte Leitfähigkeit (etwa Tunnelverbindungen mit Halbleiterbarrieren) zur Erweiterung des Frequenzbereiches erwogen. Dazu haben LEE und SCHWARZ [26] die vornehmlich numerische Simulation des phase-locking von zwei Tunnelkontakten mit einem gemeinsamen Resistorshunt unter Verwendung des RCSJ-Modells vorgestellt.

Wir betrachten hier die analoge Aufgabe der allgemeinen HF-Kopplung mittels Impedanzshunt, bevorzugen jedoch die analytische Behandlung, wobei mittleren McCumber-Parametern $\beta_C \sim 1$ besondere Aufmerksamkeit zukommt. Dieser Absicht dient in Abschn. 2 die Herleitung der reduzierten Gleichung langsam variierender Terme in der Näherung der ersten Harmonischen. Sie ermöglicht in Abschn. 3 insbesondere die Behandlung von Kohärenzfragen. In Abschn. 4 soll die zulässige Toleranz der separaten Gleichstromspeisung ansonsten identischer Individualkontakte abgeschätzt sowie die Abstrahlung von Oszillationsleistung berechnet werden. Abschließend wird noch eine Diskussion des Synchronisationsverhaltens der beiden Josephsonelemente anhand numerisch berechneter Strom-Spannungs-Charakteristiken geführt (Abschn. 5).

2. Allgemeines Kopplungsschema und reduzierte Gleichung

Das dynamische Verhalten von zwei (identischen) Josephsonverbindungen in einer Zelle mit äußerer Impedanz $Z_{(e)}$ wird etwa im Fall der Serienspeisung (vgl. Abb. 1 links) mit separat regelbaren Gleichströmen $\bar{I}_1, \bar{I}_2 \gtrsim I_C$ nach dem sog. RCSJ-Modell [24, 25] durch die Grundgleichungen

$$\bar{I}_i = \frac{\hbar C}{2e}\frac{d^2\varphi_i}{dt^2} + \frac{\hbar}{2eR_N}\frac{d\varphi_i}{dt} + I_C \sin\varphi_i + \tilde{I}\{\varphi_j\} \quad (i, j = 1, 2) \tag{1}$$

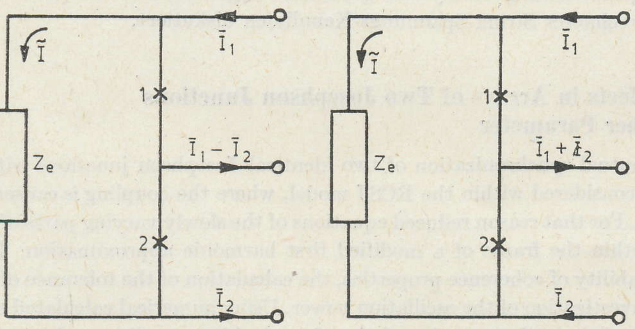

Abb. 1. Basiszelle aus zwei Josephsonelementen mit Kopplungsimpedanz in Serienspeisung (links) und Parallelspeisung (rechts) durch Gleichströme

beschrieben. Der Shuntstrom $\tilde{I}$ charakterisiert die Kopplung der Anordnung, seine funktionale Abhängigkeit von den Josephsonphasen φ_j ist durch die Struktur des Shunts $Z_{(e)}$ festgelegt. Mit den Substitutionen

$$\bar{i}_j = \frac{\bar{I}_j}{I_C}, \quad \tilde{i} = \frac{\tilde{I}}{I_C}, \quad ds = \frac{2e}{\hbar} R_N I_C \, dt, \quad \beta_C = \frac{2e}{\hbar} I_C R_N^2 C$$

werden in üblicher Weise dimensionslose Ströme $\bar{i}_j$, $\tilde{i}$, eine dimensionslose Zeit s sowie die dimensionslose Eigenkapazität (McCumber-Parameter) eingeführt und die Grundgleichungen (1) auf die einfache Form

$$\bar{i}_j = \beta_C \ddot{\varphi}_j + \dot{\varphi}_j + \sin\varphi_j + \tilde{i} \tag{2}$$

gebracht. Der Punkt $(\cdot)$ symbolisiert die Differentiation nach s. Mit dem Lösungsansatz

$$\varphi_i(s) = \omega s + \varkappa_i(s) + \alpha_i \sin(\omega s + \beta_i(s)), \tag{3}$$

also einer Modifikation der Standardnäherung der ersten Harmonischen (first harmonic approximation = FHA; vgl. z.B. [27, 28]), kann das Bewegungsproblem auf die Behandlung der zeitlich langsam variierenden Terme $\varkappa_i(s)$, $\beta_i(s)$

$$|\dot{\varkappa}_i| \ll \omega, \; |\dot{\beta}_i| \ll \omega \tag{4}$$

zurückgeführt werden. Dabei zielt die Annahme einer gemeinsamen Modenfrequenz $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ sofort auf die Konstruktion des phase-locking (Basissynchronisation); intuitiv werden dabei nur wenig differierende Speiseströme $\bar{i}_1$, $\bar{i}_2$ angenommen. Die Amplituden α_i sind bei schwacher Kopplung klein: $|\alpha_i| \ll 1$ ($\omega \gtrsim 1$, $\beta_C \sim 1$).

Mit diesen Voraussetzungen wird die Bewegungsgleichung (2) nach raschen (quasiharmonischen) und langsamen Vorgängen separiert. Die Konsistenz des Verfahrens wird dabei durch die Entwicklung der bei der Explizierung von $\sin \varphi_j$ entstehenden Besselfunktionen $J_n(\alpha_j)$ bis höchstens zur ersten Ordnung in α_j gesichert. Nimmt man eine reine HF-Kopplung an, so lautet das Resultat:

$$\bar{i}_j - \omega = \beta_C \ddot{\varkappa}_j + \dot{\varkappa}_j - \frac{\alpha_j}{2} \sin(\varkappa_j - \beta_j), \tag{5a}$$

$$\sum_j y_{ij} v_j = i e^{i\varkappa_i} \quad (i, j = 1, 2). \tag{5b}$$

Dabei sind die Spannungen

$$v_i = \omega \alpha_i e^{i\beta_i} \tag{6}$$

und die Admittanzmatrix

$$(y_{ij}) = \begin{pmatrix} y_{(i)} + y_{(e)} & y_{(e)} \\ y_{(e)} & y_{(i)} + y_{(e)} \end{pmatrix} \tag{7a}$$

mit dem Eigenleitwert $y_{(i)} = i\beta_C\omega + 1$ des Einzelkontaktes und dem HF-Leitwert $y_{(e)} = z_{(e)}^{-1} (z_{(e)} = Z_{(e)} R_N^{-1})$ des Shunts eingeführt. Die „schnellen" Gleichungen (5b) können sehr instruktiv anhand einer Ersatzschaltung gedeutet werden; mit der Kehrmatrix (aus Impedanzen)

$$(y_{ij})^{-1} \equiv (z_{ij}) = \frac{1}{\operatorname{Det}(y_{ij})} \begin{pmatrix} y_{(i)} + y_{(e)} & -y_{(e)} \\ -y_{(e)} & y_{(i)} + y_{(e)} \end{pmatrix} \tag{7b}$$

werden sie nach v_i aufgelöst:

$$v_i = \sum_j z_{ij} (i e^{i\varkappa_j}). \tag{5c}$$

Dieses System beinhaltet vier reelle Beziehungen, welche die Herleitung der Ausdrücke

$$\alpha_1 \omega \sin(\varkappa_1 - \beta_1) = -Re z_{22} - \sin(\varkappa_1 - \varkappa_2) \operatorname{Im} z_{12} - \cos(\varkappa_1 - \varkappa_2) \operatorname{Re} z_{12},$$

$$a_2 \omega \sin(\varkappa_2 - \beta_2) = -Re z_{11} + \sin(\varkappa_1 - \varkappa_2) \operatorname{Im} z_{21} - \cos(\varkappa_1 - \varkappa_2) Re z_{21}$$

gestatten. Setzt man diese in die „langsamen" Gleichungen (5a) ein, subtrahiert dieselben voneinander, so ergibt sich bei Beachtung der Symmetrien $z_{11} = z_{22}$, $z_{12} = z_{21}$ schließlich die reduzierte (verkürzte) Gleichung

$$\bar{i}_1 - \bar{i}_2 = \beta_C \ddot{\varkappa} + \dot{\varkappa} + \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} z_{12} \cdot \sin \varkappa \tag{8}$$

der Phasendifferenz $\varkappa = \varkappa_1 - \varkappa_2$, wobei (vgl. (7b))

$$z_{12} = -\frac{y_{(e)}}{y_{(i)}[y_{(i)} + 2y_{(e)}]} \tag{9}$$

gilt.

3. Interpretation der reduzierten Gleichung

Zunächst ist festzustellen, daß die verkürzte Gleichung (8) dieselbe Form wie die Grundgleichung (2) der vollen Phase φ_i im autonomen Fall ($\tilde{i} = 0$) besitzt. Zur Verdeutlichung werden eine neue (dimensionslose) Zeit

$$d\tau = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} z_{12} \, ds$$

und weitere Größen

$$I = \frac{\omega}{\operatorname{Im} z_{12}} (\bar{i}_1 - \bar{i}_2), \quad B_c = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} z_{12} \cdot \beta_C$$

eingeführt, welche die angepaßte Formulierung

$$I = B_c \varkappa'' + \varkappa' + \sin \varkappa \tag{10}$$

erlauben. Der Strich (′) bedeutet Ableitung nach τ. Für schwache Kopplungen $|y_{(e)}| \ll |y_{(i)}|$ und charakteristische Frequenzen $\omega \sim 1$ wird der neue McCumber-Parameter B_c im Sinne der Ungleichung

$$|B_c| \ll \beta_C \tag{11}$$

sowie das entsprechende Hystereseverhalten stark reduziert.

Bisher haben wir lediglich die Situation der Serienspeisung ($\operatorname{sgn} \bar{i}_1 = \operatorname{sgn} \bar{i}_2$) behandelt. Nun sollen die Verhältnisse bei Parallelspeisung ($\operatorname{sgn} \bar{i}_1 = -\operatorname{sgn} \bar{i}_2 > 0$; Abb. 1 rechts) studiert werden. Es ist zweckmäßig, den Ansatz (3) zu modifizieren:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \omega s + \varkappa_1 + \alpha_1 \sin(\omega s + \beta_1), \\ \varphi_2 &= -\omega s - \varkappa_2 - \alpha_2 \sin(\omega s + \beta_2). \end{aligned} \tag{12}$$

Dann ist unter Verwendung der Symmetrieeigenschaften

$$y_{(i)}(-\omega) = y^*_{(i)}(\omega), \quad y_{(e)}(-\omega) = y^*_{(e)}(\omega)$$

analog zu den Überlegungen in Abschn. 2 die verkürzte Gleichung

$$\bar{i}_1 - |\bar{i}_2| = \beta_C \ddot{\varkappa} + \dot{\varkappa} - \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} z_{12} \cdot \sin \varkappa \tag{13}$$

für $\varkappa = \varkappa_1 - \varkappa_2$ herleitbar, die formal aus der Beziehung (8) für die Serienspeisung durch die Transformation

$$\bar{i}_2 \to -\bar{i}_2, \; \varkappa \to \varkappa + \pi \tag{14}$$

hervorgeht. In jedem Fall ist der Koeffizient $\operatorname{Im} z_{12}(\omega)$ für die gegenseitige Phasenkopplung verantwortlich. Verschwindet insbesondere die Shuntadmittanz ($y_{(e)} = 0$), so zerfällt die Synchronisation.

Wir wenden uns nun Kohärenzfragen zu, beschränken uns aber wieder auf die Serienspeisung $\bar{i}_1 = \bar{i}_2$. Die reduzierte Gleichung (8) besitzt die stationäre Lösung ($\varkappa = \mathring{\varkappa} =$ const.)

$$\sin \mathring{\varkappa} = 0 \text{ bzw. } \mathring{\varkappa} = 0, \pi, \tag{15}$$

deren Stabilität durch die Eigenwerte

$$\mu_{1,2} = -\frac{1}{2\beta_C} \left\{ 1 \pm \left[1 - \frac{4\beta_C}{\omega} \cos \mathring{\varkappa} \cdot \operatorname{Im} z_{12} \right]^{1/2} \right\} \tag{16}$$

($\varkappa = \mathring{\varkappa} + \delta\varkappa$, $\delta\varkappa \sim e^{\mu s}$) bestimmt ist, die für schwache Kopplungen $|\mathrm{Im}\, z_{12}| \ll 1$ durch die Näherungen

$$\mu_1 \approx -\frac{1}{2\beta_C}, \quad \mu_2 \approx -\frac{1}{\omega} \cos\mathring{\varkappa} \cdot \mathrm{Im}\, z_{12} \tag{16a}$$

ersetzbar sind. Nur μ_2 enthält die Wechselwirkung; μ_1 dagegen beschreibt das Verhalten autonomer Kontakte und wird deshalb hier als redundantes Ergebnis nicht weiter beachtet. Das Stabilitätskriterium des phase-locking lautet:

$$\cos\mathring{\varkappa} \cdot \mathrm{Im}\, z_{12} > 0\,. \tag{17}$$

Gilt $\mathrm{Im}\, z_{12} > 0$, so ist nur die Lösung $\mathring{\varkappa} = 0$ stabil. Aus den Formeln (5c) folgt $\mathring{\beta}_1 = \mathring{\beta}_2 =$ const., die Oszillationsterme der FHA (3) sind in Phase, und die beiden Josephsonoszillatoren strahlen superradiant elektromagnetische Leistung ab (vgl. Abschn. 4). Für $\mathrm{Im}\, z_{12} < 0$ ist umgekehrt nur die Lösung $\mathring{\varkappa} = \pi$ stabil; es wird keine Leistung emittiert. Bei Parallelspeisung der Kontakte ergibt sich der gleiche Sachverhalt: Der Einfluß des negativen Vorzeichens am $\sin\varkappa$-Term (13) wird durch die Phasenverschiebung (14) aufgehoben.

Das Vorzeichen $\mathrm{sgn}\,\{\mathrm{Im}\, z_{12}\}$ kennzeichnet das Betriebsregime der Josephsonzelle. Dies sieht man leicht im gewöhnlichen RSJ-Modell ($\beta_C = 0$ bzw. $y_{(i)} = 1$) für den Spezialfall des Serienresonator-Shunts $z_{(e)} = r + i\left(l\omega \cdot \frac{1}{c\omega}\right)$; dann gilt

$$z_{12} = -\frac{r + 2 - i\left(l\omega - \frac{1}{c\omega}\right)}{(r+2)^2 + \left(l\omega - \frac{1}{c\omega}\right)^2}\,. \tag{18}$$

$\mathrm{sgn}\,\{\mathrm{Im}\, z_{12}\} > 0$ entspricht also dem induktiven, $\mathrm{sgn}\,\{\mathrm{Im}\, z_{12}\} < 0$ dem kapazitiven Regime [15, 16]. Im resistiven Modell ($\beta_C = 0$) gibt es insbesondere kein phase-locking, wenn die Kopplung keine reaktive Komponente besitzt ($\mathrm{Im}\, z_{12} = 0$). Anders liegt der Sachverhalt im RSCJ-Modell ($\beta_C > 0$): Unter der Annahme

$$\mathrm{Im}\, z_{(e)} = 0, \quad y_{(e)} = \frac{1}{z_{(e)}} = \mathrm{Re}\, y_{(e)}$$

berechnet man leicht

$$\mathrm{Im}\, z_{12} = \frac{2y_{(e)}(1 + y_{(e)})\,\beta_C\omega}{|(1 + i\beta_C\omega)\,(1 + i\beta_C\omega + 2y_{(e)})|^2} > 0\,. \tag{19}$$

Ein endlicher McCumber-Parameter formiert also auch das induktive Regime mit Superstrahlung, wenn ein rein resistiver Kopplungsarm vorhanden ist [26]. Der Effekt darf nicht überschätzt werden. Für $\beta_C\omega \gg 1$ (z.B. $\beta_C \gg 1$, $\omega \sim 1$) sowie $y_{(e)} \sim 1$ ergibt sich der asymptotische Zusammenhang

$$\mathrm{Im}\, z_{12} \approx \frac{2y_{(e)}(1 + y_{(e)})}{\beta_C^3\omega^3} \sim \frac{1}{\beta_C^3}\,. \tag{19a}$$

Die parasitäre Wirkung großer β_C ist auch hinsichtlich der mutuellen Synchronisation von Josephsonoszillatoren ausgeprägt.

4. Stromtoleranz und Leistungsabstrahlung

Die Einschränkung der identischen Gleichstromspeisung soll wieder fallengelassen werden. Dann erhebt sich die Frage nach der maximalen Toleranz $|\bar{i}_1 - \bar{i}_2|$, die noch ein phase-locking $\varkappa = \mathring{\varkappa}$ zuläßt. Nach Gleichung (8) bzw.

$$|\bar{i}_1 - \bar{i}_2| \leq \frac{1}{\omega} |\mathrm{Im}\, z_{12}| \tag{20}$$

ist der Maximalwert von $|\mathrm{Im}\, z_{12}|$ aufzusuchen. Das wird jetzt für die praktisch wichtige Situation $\omega = 1$, $\beta_C = 1$ ausgeführt. Damit berechnet man

$$\mathrm{Im}\, z_{12} = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{Re}\, y_{(e)} + \mathrm{Re}^2\, y_{(e)} + \mathrm{Im}^2\, y_{(e)}}{1 + 2\mathrm{Re}\, y_{(e)}[1 + \mathrm{Re}\, y_{(e)}] + 2\mathrm{Im}\, y_{(e)}[1 + \mathrm{Im}\, y_{(e)}]}. \tag{21}$$

Die Optimierungsbedingungen

$$\frac{\partial(\mathrm{Im}\, z_{12})}{\partial(\mathrm{Re}\, y_{(e)})} = 0, \quad \frac{\partial(\mathrm{Im}\, z_{12})}{\partial(\mathrm{Im}\, y_{(e)})} = 0$$

liefern die Relationen

$$[1 + 2\mathrm{Re}\, y_{(e)}]\,[1 + 2\mathrm{Im}\, y_{(e)}] = 0 \tag{22}$$

und

$$\mathrm{Re}\, y_{(e)}[1 + \mathrm{Re}\, y_{(e)}] - \mathrm{Im}\, y_{(e)}[1 + \mathrm{Im}\, y_{(e)}] = 0. \tag{23}$$

Diese beiden Gleichungen besitzen wegen ihrer Symmetrie nur die Lösung

$$\mathrm{Re}\, y_{(e)} = -\frac{1}{2}, \quad \mathrm{Im}\, y_{(e)} = -\frac{1}{2}.$$

Da jedoch der aktive Anteil der externen Admittanz nicht negativ sein darf, legen wir ihn durch den Minimalwert

$$\mathrm{Re}\, y_{(e)} = 0 \tag{24}$$

fest. Dann verliert Relation (22) ihren Sinn, und aus der verbleibenden Optimalbedingung (23) resultiert

$$\mathrm{Im}\, y_{(e)} = -1, \quad \mathrm{Im}\, z_{12} = \frac{1}{2}. \tag{25}$$

Die Stromspreizung $|\bar{I}_1 - \bar{I}_2|$ kann also 50% des kritischen Stromes I_C betragen. Hystereseeffekte sind dabei unwesentlich, da der effektive Hystereseparameter (vgl. Abschn. 3) $B_c = \frac{1}{2}$ beträgt. Wichtig ist noch die Feststellung, daß unter den gewählten Umständen (24, 25) die betrachtete Zelle aus zwei Josephsonkontakten hinsichtlich der Ausbildung der Superstrahlung sehr günstig im induktiven Regime $\mathrm{Im}\, z_{12} > 0$ optimiert und andererseits die Annahme (24) eine zwingende Folgerung der analogen Extremalaufgabe des RSJ-Modells ($\beta_C = 0$) ist [12, 18]. Hier ist jedoch die Stromtoleranz $|\bar{i}_1 - \bar{i}_2|$ wesentlich kleiner; dies wird ausführlich in Abschn. 5 diskutiert. Zur Berechnung der optimalen Oszillationsleistung gehen wir von der identischen Serienspeisung $\bar{i}_1 = \bar{i}_2$ im induktiven Regime aus. Dann gilt $\mathring{\varkappa}_1 = \mathring{\varkappa}_2$, und die am Shunt abfallende Oszillationsspannung ist (vgl. (5b, c)) bis auf einen Phasenfaktor

$$v = 2v_1 = \frac{2z_{(i)}z_{(e)}}{2z_{(i)} + z_{(e)}}\, e^{i\mathring{\varkappa}_1}, \tag{26}$$

der zugehörige Shuntstrom

$$\tilde{i} = \frac{2v_1}{z_{(e)}} = \frac{2z_{(i)}}{2z_{(i)} + z_{(e)}} e^{i\mathring{\varkappa}_1} \tag{27}$$

und dessen Leistung

$$p^{(2)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{\tilde{i}^* v\} = \frac{1}{2} \frac{4|z_{(i)}|^2}{|2z_{(i)} + z_{(e)}|^2} \operatorname{Re} z_{(e)}. \tag{28}$$

Die Verallgemeinerung auf eine lineare Kette aus N Kontakten [12, 20, 21, 23] lautet (hier ohne Beweis der Stabilität der uniformen Mode $\mathring{\varkappa}_i \equiv \mathring{\varkappa}_1$ [29]):

$$p^{(N)} = \frac{1}{2} \frac{N^2|z_{(i)}|^2}{|Nz_{(i)} + z_{(e)}|^2} \operatorname{Re} z_{(e)}. \tag{29}$$

Diese Leistung ist zu optimieren. Zuerst wird der Nenner durch die Forderung

$$\operatorname{Im} z_{(e)} = -N \operatorname{Im} z_{(i)} \tag{30}$$

minimiert, der resultierende Ausdruck $p^{(N)}$ wird optimal bei Anpassung der Wirkwiderstände

$$\operatorname{Re} z_{(e)} = N \operatorname{Re} z_{(i)}, \tag{31}$$

man erhält

$$p_{\text{opt}}^{(N)} = \frac{1}{8} N_{\text{opt}} \quad \left(N_{\text{opt}} = \frac{\operatorname{Re} z_{(e)}}{\operatorname{Re} z_{(i)}}\right),$$

also das N-fache der Maximalabstrahlung des Einzelkontakts. Wegen $\operatorname{Re} z_{(i)} = (1 + \beta_C^2\omega^2)^{-1} < 1$ muß gegenüber dem RSJ-Modell ($\beta_C = 0$) zur Anpassung bei gegebenem Wirkanteil $\operatorname{Re} z_{(e)}$ der Shuntimpedanz eine entsprechend größere Anzahl von Josephsonverbindungen bereitgestellt werden.

5. Diskussion

Wir diskutieren nun die in den vorangehenden Abschnitten gefundenen analytischen Resultate anhand einiger numerisch berechneter Details von Strom-Spannungs-Charakteristiken. Dabei wird — in völliger Übereinstimmung mit der experimentellen Praxis — ein Gleichstrom (hier $\bar{i}_1$) fixiert und der andere ($\bar{i}_2$) variiert. Der Kopplungsarm ist jeweils durch einen Resonatorshunt vom Typ $z_{(e)} = r + i\left(l\omega - \frac{1}{c\omega}\right)$ repräsentiert.

Abb. 2 zeigt die Spannungssynchronisation $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$ für die Werte $r = 1{,}0$, $l = 1{,}0$, $c = 1{,}0$ und $\bar{i}_1 = 1{,}5$ für verschiedene McCumber-Parameter β_C. $\bar{v}_i$ ist dabei als totales Zeitmittel

$$\bar{v}_i = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T ds\, \dot{\varphi}_i(s) \tag{32}$$

der Momentanspannung $\dot{\varphi}_i$ definiert. Man erkennt deutlich, daß sich ein endlicher Wert $\beta_C > 0$ förderlich auf die Synchronisationstiefe $\bar{i}_{2,\max} - \bar{i}_{2,\min}$ auswirkt ($i_{2,\max}$ und $i_{2,\min}$ sind die Extremwerte von $\bar{i}_2$ auf dem gemeinsamen Kennlinienast beider Josephsonelemente). Der Effekt hat seine Grenzen: Schon für $\beta_C = 5{,}0$ ist faktisch kein Synchronisationsverhalten mehr feststellbar. Diese Aussagen korrespondieren mit den Formeln (19, 19a). Von den verwendeten McCumber-Parametern generiert $\beta_C = 0{,}5$ die größte Synchronisationstiefe. Dies ist einfach Ausdruck des Sachverhalts, daß die gewählte Impedanz $z_{(e)}$ nicht im Sinne der Überlegungen von Abschn. 4 optimiert ist.

Abb. 3 dokumentiert für eine andere Impedanz ($r = 0{,}0$, $l = 1{,}0$, $c = 2{,}0$) schon Synchronisationstiefen von weit mehr als 0,5 ($\beta_C = 0{,}5$) bzw. 0,6 ($\beta_C = 1{,}0$). Es fällt noch die Ungleichheit

$$\bar{i}_1 - \bar{i}_{2,\min} > \bar{i}_{2,\max} - \bar{i}_1 \tag{33}$$

auf, die besonders deutlich für $\beta_C = 1{,}0$ ausgeprägt ist. Sie weist auf die komplizierte Abhängigkeit des Koeffizienten z_{12} (9) von der Frequenz ω bzw. vom Speisestrom $\bar{i}_2$ hin, die bei der Grobschätzung des Imaginärteils Im z_{12}(21) nicht berücksichtigt worden ist.

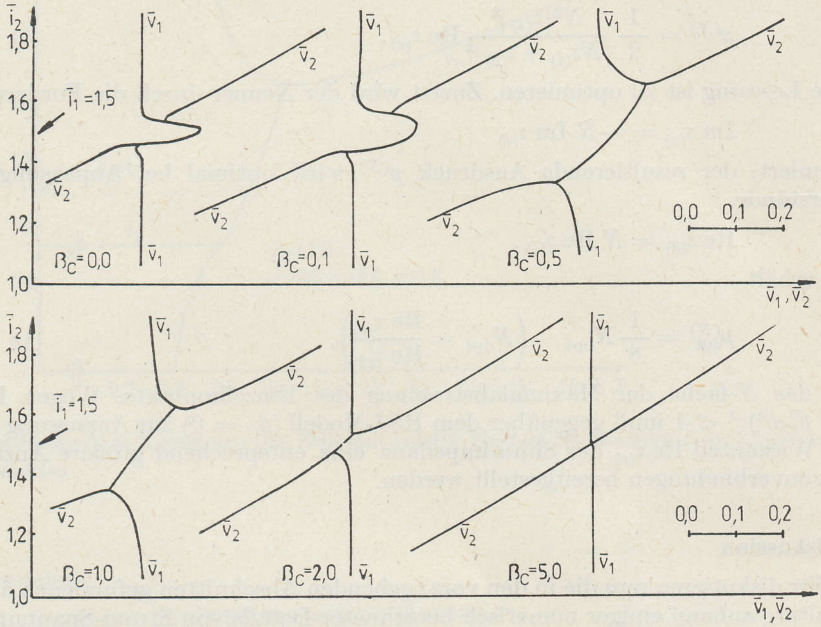

Abb. 2. Strom-Spannungs-Charakteristiken einer Basiszelle mit Resonatorshunt ($r = 1{,}0$, $l = 1{,}0$, $c = 1{,}0$) und verschiedenen McCumber-Parametern (s. Text)

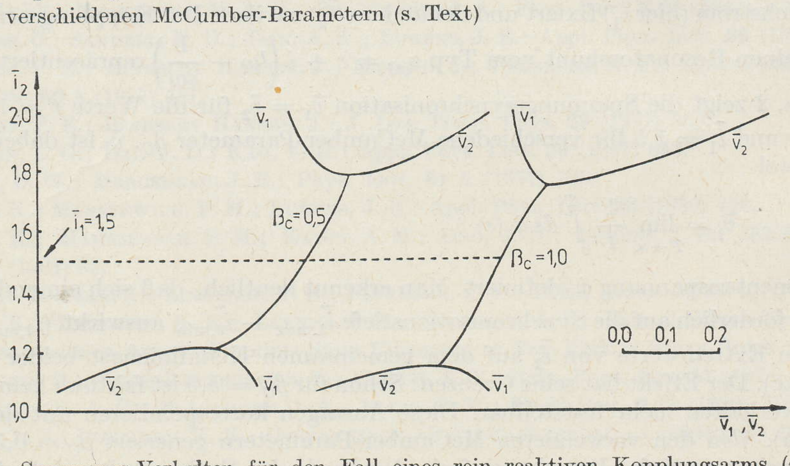

Abb. 3. Strom-Spannungs-Verhalten für den Fall eines rein reaktiven Kopplungsarms ($r = 0{,}0$, $l = 1{,}0$, $c = 2{,}0$)

In der Literatur [12, 15] sind folgende Optimalbedingungen der Toleranz $|\bar{i}_1 - \bar{i}_2|$ für das resistive Modell ($\beta_C = 0$) angegeben:

$$\operatorname{Re} y_{(e)} = 0, \quad \operatorname{Im} y_{(e)} = -\frac{1}{2} \tag{34}$$

(Man kann diese auch mit der Methodik von Abschn. 4 herleiten). Hier gehört zur Frequenz $\omega = 1$ der Strom

$$\bar{i}_1 \sim (1 + \omega^2)^{1/2} \sim 1{,}5\,.$$

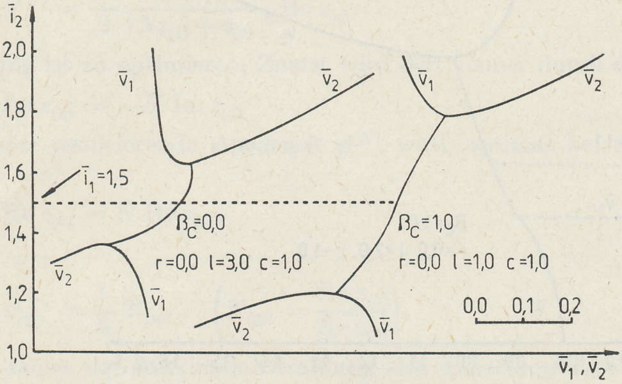

Abb. 4. Spannungssynchronisation unter optimierten Kopplungsbedingungen (s. Text) nach dem RSJ-Modell bzw. RCSJ-Modell ($\beta_C = 1{,}0$)

In Abb. 4 sind diese Daten realisiert ($r = 0{,}0$, $l = 3{,}0$, $c = 1{,}0$) mit dem Resultat

$$\bar{i}_{2,\max} - \bar{i}_1 \lesssim \bar{i}_1 - \bar{i}_{2,\min} \sim 0{,}15\,.$$

Nimmt man andererseits nach dem RCSJ-Modell mit $\beta_C = 1{,}0$ grob $\omega \sim \bar{i}_1 = 1{,}5$ an und wiederholt mit dieser Frequenz (anstelle von $\omega = 1$) die Optimierungsprozedur von Abschn. 4, so erhält man anstelle der Formeln (24, 25)

$$\operatorname{Re} y_{(e)} = 0, \ \operatorname{Im} y_{(e)} = -1{,}25, \ \operatorname{Im} z_{12} = 0{,}48$$

sowie

$$|\bar{i}_1 - \bar{i}_2| \leq 0{,}32\,. \tag{35}$$

Die numerische Verarbeitung erfolgt in Abb. 4 mit dem Tripel $r = 0{,}0$, $l = 1{,}0$, $c = 1{,}0$. Die Synchronisationstiefe beträgt etwa 0,6 (mit den schon für Abb. 2 erörterten Feinheiten der Lage des locking-Astes $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$), hat damit die doppelte Größe des entsprechenden Wertes im RSJ-Modell ($\beta_C = 0$).

Schließlich zeigt Abb. 5 noch die Situation $\beta_C = 1{,}0$, $r = 0{,}0$, $l = 2{,}0$, $c = 1{,}0$ mit dem Strom $\bar{i}_1 = 1{,}1$. Für $\bar{i}_1 = \bar{i}_2$ ist $\omega \sim 0{,}95$; diese Konfiguration entspricht also sehr gut den Optimalbedingungen (25). Indessen sieht man, daß die obere Flanke des locking-Astes nur $\bar{i}_{2,\max} - \bar{i}_1 \sim 0{,}35$ beträgt, also nicht den in Abschn. 4 ermittelten Wert 0,5 erreicht. Die Ursache dafür liegt in der schlechten Güte der FHA für $\omega \sim 1$ (bei $\beta_C = 1$). Ohne nähere Erläuterung sei dazu angemerkt, daß die Optimierung der Synchronisationstiefe des RSJ-Modells ($\beta_C = 0$) in der Näherung der ersten Harmonischen bei

$\omega = 1$ ebenfalls zu große Toleranzen $|\bar{i}_{2,\min} - \bar{i}_1|$, $|\bar{i}_{2,\max} - \bar{i}_1|$ liefert. Der Überschätzungsfaktor ist dort $\sim 1{,}6$, hat also etwa die gleiche Größe wie in der Situation von Abb. 5. Außerdem fällt auf, daß der untere Teil des locking-Astes nicht voll ausgeprägt ist, da er in den spannungslosen Bereich der autonomen $\bar{i}_2 - \bar{v}_2$-Kennlinie stößt. Dies ist im Hinblick auf praktische Anwendungen eine nachteilige Beschneidung der Stromtoleranz.

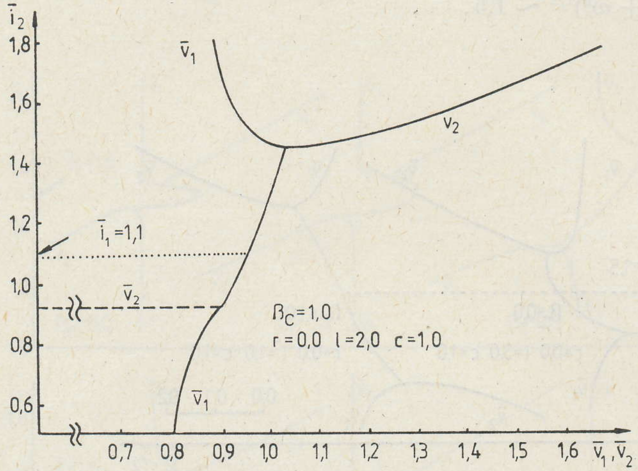

Abb. 5. Strom-Spannungs-Kennlinien der Zelle mit relativ kleinem Speisestrom $\bar{i}_1 = 1{,}1$ des ersten Josephsonkontaktes

Literaturverzeichnis

[1] Yu, M. L.; Saxena, A. M.: IEEE Trans. MAG **11** (1975) 674.

[2] Jillie, D. W.; Lukens, J. E.; Kao, Y. H.: IEEE Trans. MAG **13** (1977) 578.

[3] Jillie, D. W.; Nerenberg, M. A. H.; Blackburn, J. A.: Phys. Rev. **B 21** (1980) 125.

[4] Varmazis, C.; Sandell, R. D.; Jain, A. K.; Lukens, J. E.: Appl. Phys. Lett. **33** (1978) 357.

[5] Lindelof, P. E.; Bindslev Hansen, J.; Mygind, J.; Pedersen, N. F.; Soerensen, O. H.: Phys. Lett. **60 A** (1977) 451.

[6] Lindelof, P. E.; Bindslev Hansen, J.: J. Low Temp. Phys. **29** (1977) 369.

[7] Neumann, L. G.; Dai, Y. D.; Kao, Y. H.: Appl. Phys. Lett. **39** (1981) 648.

[8] Palmer, D. W.; Mercereau, J. E.: Phys. Lett. **61 A** (1977) 135.

[9] Jain, A. K.; Mankiewich, P. M.; Lukens, J. E.: Appl. Phys. Lett. **36** (1980) 774.

[10] Jain, A. K.; Mankiewich, P. M.; Kadin, A. M.; Ono, R. H.; Lukens, J. E.: IEEE Trans. MAG **17** (1981) 99.

[11] Bindslev Hansen, J.; Lindelof, P. E.; Finnegan, T. F.: IEEE Trans. MAG **17** (1981) 95.

[12] Jain, A. K.; Likharev, K. K.; Lukens, J. E.; Savageau, J. E.: Mutual Phase-Locking in Josephson-Junction Arrays (Preprint: State University of New York at Stony Brook 1982).

[13] Giovannini, B.; Weiss-Parmeggiani, L.; Ulrich, B. T.: Helv. Phys. Acta **51** (1978) 69.

[14] Nerenberg, M. A. H.; Blackburn, J. A.; Jillie, D. W.; Phys. Rev. **B 21** (1980) 118.

[15] Kuzmin, L. S.; Likharev, K. K.; Ovsyannikov, G. A.: Radiotekhnika i elektronika **26** (1981) 1067.

[16] Krech, W.: Ann. Phys. (Leipzig) **39** (1982) 50.

[17] Dai, Y. D.; Kao, Y. H.: J. Appl. Phys. **52** (1981) 4135.
[18] Likharev, K. K.; Kuzmin, L. S.; Ovsyannikov, G. A.: IEEE Trans. MAG **17** (1981) 111.
[19] Nerenberg, M. A. H.; Blackburn, J. A.: Phys. Rev. **B 23** (1981) 1149.
[20] Ovsyannikov, G. A.; Kuzmin, L. S.; Likharev, K. K.: Radiotekhnika i elektronika **27** (1982) 1613.
[21] Krech, W.: Ann. Phys. (Leipzig) **39** (1982) 117, 349.
[22] Nerenberg, M. A. H.; Blackburn, J. A.; Vik, S.: Phys. Rev. **B 30** (1984) 5084.
[23] Krech, W.; Likharev, K. K.; Berthel, K.-H.: LT-17 Conference Proceedings. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B. V. 1984, 910.
[24] Stewart, W. C.: Appl. Phys. Lett. **12** (1968) 277.
[25] McCumber, D. E.: J. Appl. Phys. **39** (1968) 3113.
[26] Lee, G. S.; Schwarz, S. E.: J. Appl. Phys. **55** (1984) 1035.
[27] D'Humieres, D.; Beasley, M. R.; Huberman, B. A.; Libchaber, A.: Phys. Rev. **A 26** (1982) 3483.
[28] Ben-Jacob, E.; Bergman, D. J.: Phys. Rev. **A 29** (1984) 2021.
[29] Krech, W.: wird veröffentlicht.

Bei der Redaktion eingegangen am 2. August 1985.

Anschr. d. Verf.: Dr. W. Krech und Dr. M. Riedel
Sektion Physik der Friedrich-Schiller-Universität
Max-Wien-Platz 1
Jena
DDR-6900