Universität Potsdam
Institut für Mathematik WS 2010

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Mathematik I für Geoökologen und Geowissenschaftler“

#6
Letzter Abgabetermin: 29. 11. 2010

1. Gegeben seien die quadratischen Matrizen $A=\begin{pmatrix} 4 & -4 & -8 \\ -2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ und $B=\begin{pmatrix} -21 & 7 & 14 \\ 9 & -3 & -6 \\ -15 & 5 & 10 \end{pmatrix}$.
   a) Berechnen Sie $A\cdot B$ und $B\cdot A$!
   b) Seien *x*,*y* reelle Zahlen. Bei der Lösung von Gleichungen mit reellen Zahlen können Sie aus „$x\cdot y=0$“ auf „ $x=0 \quad \vee \quad y=0$ “ schließen.
   Betrachten Sie die entsprechende Implikation für verkettete Matrizen *A*,*B*:
   $$A\cdot B=0 \quad \Rightarrow \quad A=0 \vee B=0$$
   Ergänzen Sie diese Implikation so, dass eine wahre Aussage entsteht!

(3 Punkte)

2. $C[a,b]$ sei die Menge der im Intervall stetigen Funktionen. In dieser Menge wird eine Addition + und eine reelle Vervielfachung $\cdot$ für Funktionen $f,g\in C[a,b]$ und $\lambda\in\mathbb{R}$ erklärt:
   $+:C[a,b]\times C[a,b]\to C[a,b]$ vermöge $(f+g)(t)=f(t)+g(t)$ für $t\in[a,b]$,
   $\cdot:\mathbb{R}\times C[a,b]\to C[a,b]$ vermöge $(\lambda\cdot f)(t)=\lambda f(t)$ für $t\in[a,b]$.
   $V=(C[a,b],\mathbb{R},+,\cdot)$ ist ein Vektorraum.
   Die Menge $C^1[a,b]$ der (mindestens) einmal differenzierbaren Funktionen ist eine Teilmenge von $C[a,b]$. Zeigen Sie:
   a) $C^1[a,b]$ ist eine echte Teilmenge von $C[a,b]$, d.h. $C^1[a,b]\subset C[a,b]$!
   b) $U=(C^1[a,b],\mathbb{R};\oplus,\odot)$ ist ein Untervektorraum von *V*! ($\oplus$ und $\odot$ sind die Einschränkungen der oben erklärten Addition und Vervielfachung auf die Menge der differenzierbaren Funktionen $C^1[a,b]$.)

(6 Punkte)

3. Untersuchen Sie die gegebenen Vektoren *u*,*v* im $\mathbb{K}$-Vektorraum *V* auf lineare Unabhängigkeit!
   a) $V=\mathbb{C}^2$, $\quad\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $\quad u=\begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$,
   b) $V=\mathbb{C}^2$, $\quad\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\quad u=\begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$.

(4 Punkte)

4. Bildet das System der drei Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$? Begründung!

(3 Punkte)