

**Klausur zur Vorlesung  
„Mathematik II für Geoökologen und Geowissenschaftler“**

Name, Vorname (**DRUCKSCHRIFT!!!**): .....

Matrikelnr.: ..... Fachsemester: .....

- Studiengang:
- Diplomgeoökologie
  - Bachelor Geoökologie
  - Bachelor Geowissenschaften
  - anderer: .....
- 

- Bitte **leserlich** schreiben!
- Den **Lösungsweg** logisch und sprachlich einwandfrei und **vor allem nachvollziehbar** darstellen! Umformungsschritte begründen! Eine unkommentierte Folge von Termen oder Gleichungen reicht in der Regel nicht!
- **Jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt bearbeiten!**
- Jedes Blatt mit Namen, Vornamen und Matrikelnummer beschriften!
- Ihre Lösungen legen Sie zwischen die beiden Aufgabenblätter und geben diese so ab.
- Die jeweiligen Punktabgaben zu den Aufgaben spiegeln den zu erwartenden Umfang der Antwort bzw. den Schwierigkeitsgrad des Problems wider. Insgesamt sind 65 Punkte erreichbar. (1,0 ab 61P., 1,3 ab 57P., 1,7 ab 53P., 2,0 ab 49P., 2,3 ab 45P., 2,7 ab 42P., 3,0 ab 39P., 3,3 ab 36P., 3,7 ab 33P., 4,0 ab 30P.)
- Gesamtarbeitszeit: 180 Minuten
- Ihre Lösungen legen Sie zwischen die beiden Aufgabenblätter und geben diese so ab.
- Punktverteilung für die Aufgaben:

Aufgabe Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
erreichbare Punkte	10	8	7	10	6	5	10	9
erreichte Punkte								

Gesamtpunktzahl:

Note:

**Viel Erfolg!**

1. Gegeben sei die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 5 \\ 12 & 14 & 10 \end{pmatrix}$ .

- Bestimmen Sie das charakteristische Polynom  $\chi(\lambda)$  von  $A$ , sortiert nach Potenzen von  $\lambda$ !
- Ermitteln Sie die Eigenwerte von  $A$ !
- Zeigen Sie, dass  $v_1 = (-2, 1, 2)^T$  Eigenvektor von  $A$  ist! Zu welchem Eigenwert?
- Mit dieser Matrix  $A$  werde eine lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vermöge  $x \mapsto y = \varphi(x) = Ax$  definiert. Warum ist hier der Kern der Abbildung  $\varphi$  gleichzeitig Eigenraum? Geben Sie auch die Dimension dieses Eigenraumes (und damit des Kernes) an!

(10 Punkte)

2. Eine quadratische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  habe die reellen Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  (treten mehrfache Eigenwerte auf, seien sie entsprechend oft notiert).

- Zeigen Sie: Dann hat die Matrix  $A - \mu I$  die Eigenwerte  $\lambda_1 - \mu, \lambda_2 - \mu, \dots, \lambda_n - \mu$  ( $\mu \in \mathbb{R}$ )!
- Begründen Sie, dass die Matrix  $B = (A - 3I)^2$  nicht indefinit sein kann!

c) Mit der Matrix  $A$  aus der Aufgabe 1.) gilt  $B = (A - 3I)^2 = \begin{pmatrix} -44 & -36 & -30 \\ 72 & 62 & 43 \\ 144 & 106 & 95 \end{pmatrix}$  (das

brauchen Sie nicht nachzurechnen!). Geben Sie die Eigenwerte von  $B$  an! Nutzen Sie dafür u.a. die Erkenntnis aus a)!

(8 Punkte)

3. Funktionen von mehreren Variablen

a) Gegeben sei die Funktion  $f(x, y) = \frac{\cos(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .  $f$  ist im Punkt  $P(0,0)$  nicht definiert. Lässt sich  $f$  in diese Stelle stetig fortsetzen? Begründung!

b) Gegeben sei die Funktion  $f(x, y) = 2e^{\frac{1}{4}(y^2 - 2x)}$ .

- Notieren Sie das totale Differential von  $f$ !
- Bestimmen Sie die Taylorreihe bis zum quadratischen Glied für die Entwicklungsstelle  $(x_0, y_0) = (2, 2)$ !
- Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene an  $f$  in  $(x_0, y_0) = (2, 2)$ ?

(7 Punkte)

4. Gegeben sei die Funktion  $w = f(x, y) = \frac{x(1-y^2)}{x^2+1}$ . Bestimmen Sie alle lokalen Extrempunkte von  $f$  (einschließlich Art des Extremums)!

(10 Punkte)

5. Gegeben seien die Messwerte lt. Tabelle.

$x$	0	5	10	20
$y$	16	10	4	1

Es ist bekannt, dass ein exponentieller Zusammenhang gemäß  $y = f(x) = a \cdot e^{bx}$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) vorliegt. Die Koeffizienten  $a, b$  sollen aus der Messreihe näherungsweise berechnet werden.

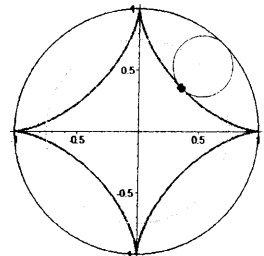
- a) Der nichtlineare Exponentialansatz kann linearisiert werden. Führen Sie die Linearisierung durch!
- b) Berechnen Sie mittels Quadratmittelapproximation im linearisierten Modell die Koeffizienten  $a, b$ !

(6 Punkte)

6. Der radioaktive Zerfall einer ursprünglich (zum Zeitpunkt  $t=0$ ) vorhandenen Stoffmenge  $N_0$  kann durch die Funktion  $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$  beschrieben werden. Dabei ist  $\lambda$  die Zerfallskonstante. Betrachtet wird nun ein Experiment für einen gewissen Stoff. Die Zerfallskonstante dafür wurde einer Tabelle entnommen und kann als exakt, das heißt „fehlerfrei“ angesehen werden; es gelte  $\lambda = 0.25s^{-1}$ . Die Stoffmenge wurde zu  $N_0 = (24 \pm 0.3)g$  bestimmt. Welche Stoffmenge  $N_1 = N(t_1)$  liegt für  $t_1 = (10 \pm 0.1)s$  vor? Bestimmen Sie den absoluten Fehler von  $N_1$  mit Hilfe des totalen Differentials!

(5 Punkte)

7. In einem Kreis mit dem Radius  $R=1$  rolle ein (kleinerer) Kreis mit dem Radius  $r = \frac{1}{4}$ . Der Mittelpunkt des rollenden Kreises bewegt sich dabei auf dem strichlierten Kreis mit dem Radius  $r_M = R - r$ . Der markierte Punkt des rollenden Kreises beschreibt eine sogenannte Astroide, die durch den Ortsvektor



$$(*) \quad r(t) = (R-r) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos \left( \left( \frac{R}{r} - 1 \right) t \right) \\ -\sin \left( \left( \frac{R}{r} - 1 \right) t \right) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$$

beschrieben wird.

(Derartige Kurven spielen z.B. bei Planetengetrieben eine Rolle.)

- a) In welchem Punkt beginnt die Astroide und in welcher Richtung wird sie für wachsendes  $t$  durchlaufen?
- b) Zeigen Sie, dass (\*) mit den gegebenen Werten für  $R$  und  $r$  äquivalent zu  $r(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$  ist!
- c) Berechnen Sie die Länge des Astroidenteils im 1. Quadranten! Nutzen Sie dazu die Darstellung aus b). Bestimmen Sie zuerst das entsprechende Parameterintervall  $[t_1, t_2]$ .

(10 Punkte)

## 8. Vektorfelder

a) Gegeben sei das Vektorfeld  $\underline{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2y - 2z^3 \\ x^3 + 2yz^2 \\ 2y^2z - 6xz^2 \end{pmatrix}$ .

(i) Ist das Feld wirbelfrei?

(ii) Falls das Feld konservativ ist, bestätige man, dass das skalare Feld  $v(x, y, z) = x^3y + y^2z^2 - 2xz^3 + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , ein Potential des Vektorfeldes  $\underline{F}$  ist!

b) Betrachtet werde das Vektorfeld  $\underline{F}(x, y, z) = f(r) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

(i) Zeigen Sie, dass für die Divergenz von  $\underline{F}$  gilt:  $\operatorname{div} \underline{F} = f'(r) \cdot r + 3f(r)$ !

(ii) Wie muss  $f$  gewählt werden, damit das Vektorfeld  $\underline{F}$  für  $r > 0$  überall quellenfrei ist?

Hinweis: Es ist  $f'(r) = \frac{df}{dr}$  zu setzen.

c) Zeigen Sie, dass die skalare Funktion  $\Phi(x, y) = \sin(2x) + \ln(y^2)$  eine Potentialfunktion ist, d.h. die Poissongleichung mit der Störfunktion  $f(x, y) = -2 \left( 2 \sin(2x) + \frac{1}{y^2} \right)$  löst!

(9 Punkte)