

**Übungsaufgaben zur Vorlesung
„Mathematik II für Geoökologen und Geowissenschaftler“**

#2

Letzter Abgabetermin: 26. 4. 2011

1. Wiederholung zu linearen Abbildungen

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ und eine lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$x \mapsto \varphi(x) = Ax.$$

a) Vektoren $x \in \mathbb{R}^2$ werden in der $x_1 - x_2$ -Ebene durch Punkte dargestellt. Seien

$$x_1 \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}, x_2 \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} \times \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

Stellen Sie alle so definierten Vektoren x in einem kartesischen $x_1 - x_2$ -Koordinatensystem (Originalebene) und alle Bilder $y = \varphi(x)$ dieser Vektoren in einem zweiten kartesischen Koordinatensystem (Bildebene) dar! Verwenden Sie für beide Koordinatensysteme die gleiche Achsenteilung!

b) Ermitteln Sie die Determinante von A sowie das charakteristische Polynom von A , indem Sie die Determinante $|A - \lambda I| =: \chi(\lambda)$ berechnen!

c) Berechnen Sie die Eigenwerte von A !

d) Zeichnen Sie in die Originalebene die Gerade durch den Ursprung und den

Vektor $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie in die Bildebene das Bild dieser Geraden ein!

Sie stellen fest: Original- und Bildgerade haben die gleiche Richtung.

e) Gibt es eine zweite Gerade mit dieser Eigenschaft? Wenn ja, geben Sie zwei Punkte auf dieser Geraden an!

(8 Punkte)

2. Ermitteln Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte der folgenden Matrizen!

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(6 Punkte)

3. Gegeben sei eine Rechtsdreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (d.h. $r_{ij} = 0$ für $i > j$, vgl. 2.c). Notieren Sie das charakteristische Polynom von R sowie die Eigenwerte!

(2 Punkte)